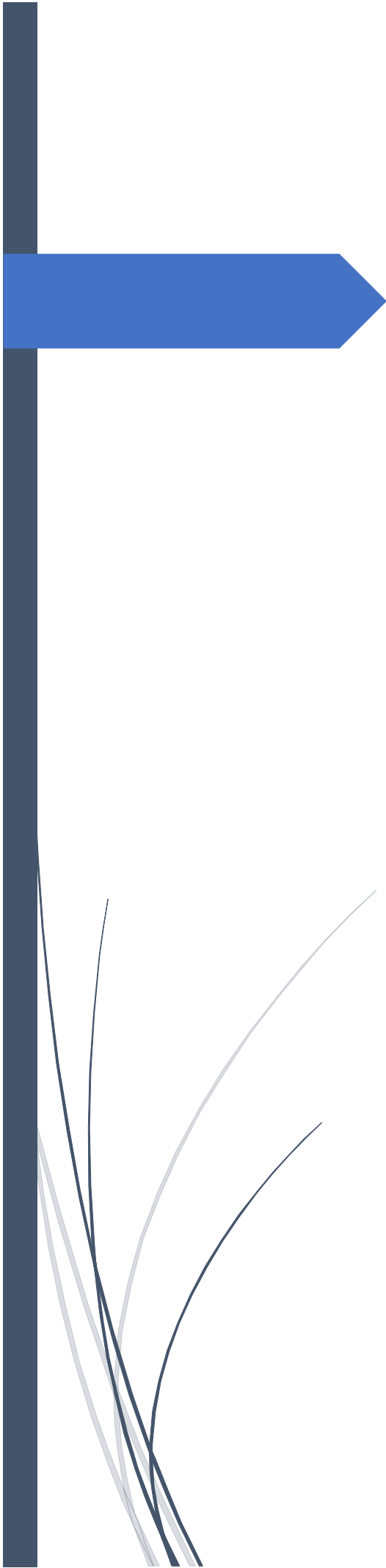




基礎 線形代数講座

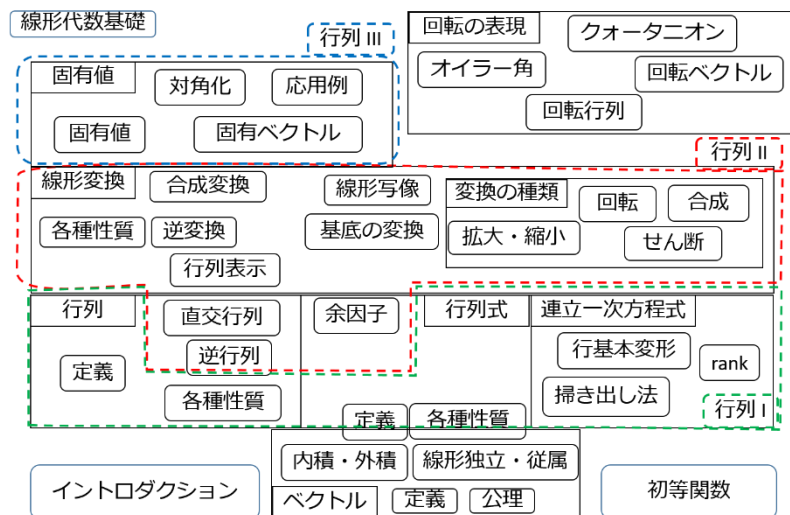
線形代数・回転の表現

株式会社 セガ 開発技術部

基礎線形代数講座

本書は 株式会社 セガ にて行われた有志による勉強会用に用意された資料を一般に公開するものです。勉強会の趣旨は いわゆる「大人の学び直し」であり、本書の場合は高校数学の超駆け足での復習から始めて主に大学初年度で学ぶ線形代数の基礎の学び直し、および応用としての3次元回転の表現の基礎の理解が目的となっています。広く知られていますように線形代数は微積分と並び理工系諸分野の基礎となっており、だからこそ大学初年度において学ぶわけですが、大変残念なことに高校数学では微積分と異なりベクトルや行列はどんどん隅に追いやられているのが実情です。

線形代数は様々な知見を元に組み立てられている分野であり、基礎部分だけでもざっと図のような多岐にわたる項目を学んでようやくその全貌が見えてくることになります。これが線形代数を学ぶ上での難しさの一因とも言え、個々の計算はできるようになっても、繋がりがよく分からない、全体として何なのか？が分かりにくい要因ともいえます。



（却って分かりづらいと感じた人はごめんちゃい：←死語らしいw）導入・導出は多少なりとも丁寧に、証明はできるだけ簡潔にを心がけ、また話の流れを分かりやすくするため長い証明は付録に回すなどの手法も試みてみました。反面、ページ数の関係から例題や演習問題は極々限られた量にとどまっております、これについては読者がネット等から自身で入手して理解を深めてもらうことを期待しています。

本書の構成としては、全8講（8章）で以下のように大きく3部構成となっています。各講の各項目の先頭に[▼]マークがついているものは、少し進んだ内容となっており、難しいと思ったら最初はとばしてもOKです。[▼A]などの文字（A）が同じ項目は互いに関連しているので参考にして下さい。

○第1部：導入および高校数学の超駆け足復習+ α

- ・第1講：イントロダクション
- ・第2講：初等関数

本書は高校数学の数Iの内容を理解していることを前提としています。ウォーミングアップとしてそれ以降の高校数学で必要な内容を超駆け足で復習します。必要に応じ各自でさらに復習しましょう。

○第2部：線形代数の基礎（大学初年度で学ぶ程度の内容+ α ）

- ・第3講：ベクトル
- ・第4講：行列 I：連立一次方程式
- ・第5講：行列 II：線形変換
- ・第6講：行列 III：固有値・対角化

ベクトルと行列が主人公である線形代数の基礎を学びます。行列の3講はそれぞれのテーマの視点でベクトルと行列が何を表し、どのように絡み合っているのかを学んでいきます。全74ページで線形代数の基礎を駆け足で学ぶことになり、本質的な事は大体網羅されていますが、紙面の都合上省かれた事項等もあります。理工系各分野に応じて読者自身により不足となる部分、さらには発展的な線形代数を学ぶことになるかと思います。

○第3部：（3次元）回転の表現の基礎

- ・第7講：回転の表現 I
- ・第8講：回転の表現 II

応用としてさまざまな分野で重要となる3次元回転の表現である「回転行列」「オイラー角」「回転ベクトル」「クォータニオン」の基礎を学びます。どう使うかよりどうしてそうなるのかという内容が中心となっています。やや難しいと感じるかも知れません。線形代数をある程度理解している読者がここから読み始める場合は、まず第5講第5節に目を通すことをお勧めします。逆に第5講まで読み進めた読者は、第6講を飛ばしてもある程度理解できるかと思います。

●学生の方へ

このような異端の書（笑）で学ぼうという奇特な方がもし居たら、言うまでもないことですが、本書を読んだあと講義で指定されている教科書を改めて読み直してみましょう。きっと今まで以上に理解が深まるのではないかと思います。未来を担う皆さんにとって、本書が少しでもお役に立てれば幸いです。

目次

([▼]印は少し進んだ内容なので最初はとばしても OK)

【第 1 講】イントロダクション	1
【1-1】はじめに	1
【1-2】数学導入：数の拡張	1
【1-3】付録：ギリシャ文字一覧.....	8
【第 2 講】初等関数	9
【2-1】はじめに	9
【2-2】指数・対数関数	9
【2-3】三角関数	14
【2-4】指数関数の別定義	17
【2-5】[▼A] オイラーの公式.....	18
【2-6】付録 1：二項定理（二項展開）	20
【2-7】付録 2：総和記号.....	21
【2-8】付録 3： $\sin \theta / \theta \rightarrow 1$ ($\theta \rightarrow 0$) の証明	22
【2-9】付録 4：三角関数の各公式の証明	23
【第 3 講】ベクトル	27
【3-1】はじめに	27
【3-2】ベクトルがもつ性質	27
【3-3】内積.....	30
【3-4】抽象化されたベクトルの概念と例.....	32
【3-5】外積.....	34
【3-6】 n 本のベクトルが張る n 次元体積	36
【3-7】付録 1：Levi-Civita 記号	39
【3-8】付録 2：外積の公式の証明.....	40
【3-9】付録 3：置換と転倒数の偶奇性	43
【第 4 講】行列 I：連立一次方程式.....	45
【4-1】はじめに	45
【4-2】掃き出し法.....	45
【4-3】行列式の導入.....	51
【4-4】行列の導入.....	55
【4-5】付録 1：行列式の重要な性質.....	60
【4-6】付録 2：簡約行列の構造	62

【4-7】 付録 3 : 補足説明.....	63
【4-8】 付録 4 : 行列式の定義について	64
【第 5 講】 行列 II : 線形変換	65
【5-1】 はじめに	65
【5-2】 線形変換 (一次変換)	65
【5-3】 逆行列	68
【5-4】 直交行列	73
【5-5】 線形変換の行列による表示	76
【5-6】 [▼C]付録 1 : Levi-Civita 記号の積の性質	81
【5-7】 付録 2 : 複素数の行列による表現	82
【第 6 講】 行列 III : 固有値・対角化	83
【6-1】 はじめに	83
【6-2】 固有ベクトルと固有値.....	83
【6-3】 行列の対角化.....	88
【6-4】 実対称行列の対角化	92
【6-5】 応用例	94
【6-6】 付録 1 : 複素ベクトル空間・行列について	97
【6-7】 付録 2 : 各証明	97
【6-8】 [▼A]付録 3 : オイラーの公式の行列表現	100
【第 7 講】 回転の表現 I.....	101
【7-1】 はじめに	101
【7-2】 回転行列	102
【7-3】 オイラー角と仲間たち.....	106
【7-4】 回転ベクトル.....	111
【7-5】 付録 1 : 回転変換に関する 2 証明.....	117
【7-6】 [▼A,C]付録 2 : 3 次回転行列となる行列指数関数	117
【第 8 講】 回転の表現 II	119
【8-1】 はじめに	119
【8-2】 クォータニオンの導入 : ハミルトン劇場.....	119
【8-3】 クォータニオン : 定義と諸性質.....	124
【8-4】 クォータニオン : 3 次元回転の表現	130
【8-5】 [▼]付録 1 : 一般的な 4 次元の回転について	137
【8-6】 付録 2 : 成分表示における 4 次元内積の不変性について	138
【8-7】 [▼A]付録 3 : オイラーの公式と代数的補間式について	139

【第 1 講】 イントロダクション

【1-1】 はじめに

本講では、導入として数の拡張の歴史を振り返る。それぞれ各分野の内容に繋がっていくものであるが、他にも数学の考え方に触れてもらいたいというねらいもある。

【1-2】 数学導入：数の拡張

【1-2-1】 自然数 $\mathbb{N}$ ：全てはここから

- いつ頃から？：太古の昔から
- $(0), 1, 2, 3, \dots$ とっても身近な数 といえ
普段意識はしないけど実は既にだいぶ抽象化された概念。1 人でも 2 個でも 3 台でもなく、
 $1, 2, 3 \dots$
- 0 を自然数に含めるか否かは流儀による。実は自然数の定義は難しい。(ざっくり言うと)
集合論的に空集合に対応させた 0 から始まる体系で自然数を定義しているので、その立場では
自然と自然数に 0 が含まれるとの事。一方で整数論的には伝統的に(?) 0 は含まないとの事。
(数学者は大変だなあ・・・しみじみ)
いずれにしても、必要に応じて非負の整数、正の整数という用語で混乱をさけるべし。
- 足し算 (+)、掛け算 ($\times$)：どの 2 つの自然数でやっても結果はまた自然数になる。
当たり前の事だけど、そうでないといろいろと不便。
→この性質 (閉じた演算であること) はとても重要。
- 引き算 ($-$)、割り算 ($\div$)：便利だけど自然数の範囲では解なし続出 (困ったもんだ)。

【1-2-2】 整数 $\mathbb{Z}$ ：0 の発見、負の数の導入

- $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- いつ頃から？
数としての 0 と負数の概念が確立したのは 5 世紀頃の古代インドが定説らしい。
- 実際、数の世界で革命的なできごとであるわけだが、それだけに今まで「解なし」扱いだった
負数の領域に対する抵抗も文化的背景によっては大きく、西洋、特に欧州では受け入れられる
のに 650 年！程かかったらしい (17 世紀ごろ!) ¹。
- 引き算 ($-$) が整数の範囲で閉じて使えるようになった (重要)。
代数的には、このために自然数が整数に拡張されたとみることできる。

¹ 本講座のテキストを準備するにあたり個人的にも多くの知見を得た (ている) が、これが一番驚いた

【第1講】イントロダクション

- 負の数の掛け算：子供に説明できますか？

$-1 \times 1 = -1$ は、 -1 が1つなので -1 と分かりやすいが

$1 \times (-1)$ や $-1 \times (-1)$ は？

$$\begin{array}{ll} 1 \times 2 = 2 & -1 \times 2 = -2 \\ 1 \times 1 = 1 & -1 \times 1 = -1 \\ 1 \times 0 = 0 & -1 \times 0 = 0 \\ 1 \times (-1) = -1 ? & -1 \times (-1) = 1 ? \end{array}$$

これをみると、 $1 \times (-1) = -1$, $-1 \times (-1) = 1$ となるのは妥当に思える。

- 乗法の負数への拡張

もう少し数学的な立場（代数）でいくと、演算子の性質を保つ形が自然な拡張とみなされる。

乗法の性質：自然数 $\mathbb{N}$ では交換則（可換）、分配則が成り立っていた

→ 整数 $\mathbb{Z}$ でも同様に成立するように拡張する。

- ・ 交換則： $a \times b = b \times a$ より

$$1 \times (-1) = -1 \times 1 = -1$$

- ・ 分配則： $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$$\begin{aligned} 0 &= (-1) \times (1 + (-1)) \\ &= (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) \\ &= -1 + (-1) \times (-1) \end{aligned}$$

両辺に1を足して、

$$(-1) \times (-1) = 1$$

この拡張²でいろいろやってみたけど、特に問題無さそう→**じゃ、これで**

（この後、この拡張がもっと自然だと感じられるようになります）

[1-2-3] 有理数 $\mathbb{Q}$ ：分数・小数の導入

- いつ頃から？：古代エジプト(BC1650 ごろ)というのが定説らしい

（なんと0, 負数よりずっとずっと前から！）

- 割り算（÷）も有理数の範囲で閉じて使えるようになった（重要）。

これで四則演算が有理数の範囲で閉じ、また後述するように有理数は数直線上に「ぎっしり」と存在し、実用上も問題なく数とは有理数であるという認識が持たれていた。

² このような演算の拡張を、第2講 初等関数 で実際に指数に対して行い、指数関数を定義する

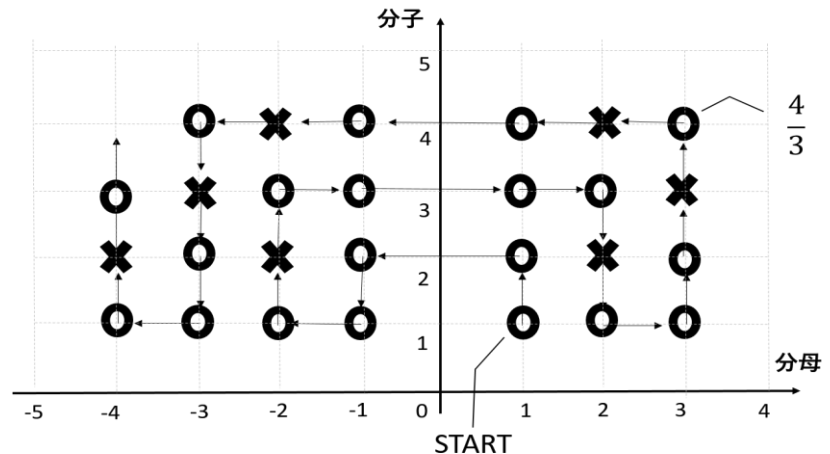
- 有理数って整数よりいっぱいありそう(?)

任意の有理数 $p < q \in \mathbb{Q}$ に対して $r = (p + q)/2$ とすると、 $p < r < q$ となる新たな有理数があることが分かる。これはどんなに近い p, q に対しても成り立ち、また p と r 、 r と q の間にもそれぞれ $(p + r)/2$ 、 $(r + q)/2$ としてさらに新たな有理数を得ることができる。この操作は無限に繰り返すことができ、このように有理数は数直線上に「ぎっしり」と詰まっている。このような性質を「稠密（ちゅうみつ）」であると言う。

稠密である有理数は直観

的には整数の数より、もっとずっと「いっぱいありそう」な気がするけど、どうだろう？

この図は、横軸に分母となる（0 以外の）整数、縦軸に分子となる正の整数をとることで、



全ての有理数を格子点上

にマッピングしたものである。START と書かれた $1/1$ から始めて格子点をジグザグにたどり、既約分数なら O をそうでなければ X をつけながら、 O の数を数えていく事で重複を除いた有理数の数を「数えられる」事を示している。「数えられる」ということは、全ての自然数と一対一対応がつけられる事を意味し、自然数の集合も、有理数の集合もどちらも要素数が無限にある無限集合であるが、その「大きさは同じ」と捉えられることを意味している。直観に反する、驚くべき事実（無限大にまつわるマジック）である。

この「数えられる」無限集合の事を**可算集合**または単に可算であるという。有限集合の要素数を拡張した無限集合の「要素数」にあたる概念を**濃度**といい、記号 $\aleph$ (アレフ：ヘブライ文字) で表す³。可算集合の濃度のことを可算濃度といい、 $\aleph_0$ と表す。自然数、整数、有理数の集合はどれも可算であり、その濃度は同じ可算濃度となる。

[1-2-4] 実数 $\mathbb{R}$ ：無理数の導入

- いつ頃から？

古代ギリシャ（BC500 年ごろ）では、ピタゴラスが「教団」を作り、数学を門外不出で研究

³ 中二病心がくすぐられるでしょ？（これ言いたかったw）

【第 1 講】 イントロダクション

していた。教団では数は長さとして表されるもの（幾何学では辺の長さの比が重要）として、数とは有理数であるという事が教義とされていたらしい。

ピタゴラスの定理のお膝元、等辺の長さ 1 の直角二等辺三角形の斜辺の長さ($\sqrt{2}$)が有理数でない事が判明するのは時間の問題⁴・・・。

- $\sqrt{2}$ は有理数でない：有名な背理法を用いた証明

【証明】 $\sqrt{2}$ が有理数だとすると互いに素な整数 p, q により

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

と書ける。両辺を 2 乗して整理すると、 $p^2 = 2q^2$ となり、 p^2 は 2 の倍数となる。2 乗して 2 の倍数となるので、 p 自身も 2 の倍数。従って p^2 は 4 の倍数となり、 q^2 も 2 の倍数。よって p と同様に q も 2 の倍数となる。以上により p も q も 2 の倍数となり、互いに素という仮定に矛盾。従って、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない。■

- 実数の濃度

実数は整数や有理数と同じ濃度を持つのか？ 実数は可算集合ではないという事が 1891 年にカントールにより証明された。その際に用いられたのが有名な対角線論法という手法である。

【証明】 区間 $[0, 1]$ に属する実数の集合を考え、これが可算だと仮定する。可算なので、 $0 \leq a \leq 1$ となる全ての実数 a に番号をつけ、 $a_1, a_2, a_3, \dots$ とする事ができる。この個々の a_i を 2 進小数展開したものを、 $a_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3} \dots$ と表記し ($a_{ij} = 0$ or 1)、以下のように並べる。

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33} \dots a_{3n} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

ここで対角線に並ぶ $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots$ を用いて、実数 b を以下のように定める⁵。

$$b = 0.b_1b_2b_3 \dots b_n \dots, \quad b_i = \sim a_{ii}$$

この b は、小数点以下 1 桁目 $b_1 \neq a_{11}$ なので $b \neq a_1$ 、同様に $b_2 \neq a_{22}$ なので $b \neq a_2$ であり、結果 $b \neq a_i, \forall i \in \mathbb{N}$ となる。従って b は $0 \leq b \leq 1$ を満たす実数にも関わらず、全ての $0 \leq a \leq 1$ となる実数に番号を降ったどの a_i と也不同なり矛盾する。よって区間 $[0, 1]$ の実数の集合は可算ではない。■

⁴ 教団のヒッパソスが発見し、教団から追放（もしくは処刑）されたとの説もあるが真偽は不明。

⁵ つまり $a_{ii} = 0$ なら $b_i = 1$, $a_{ii} = 1$ なら $b_i = 0$ とする。 $b_i \neq a_{ii}$ とできれば、何進数でもよい。

- 「実数の連続性」

上記実数の濃度でみたように、整数や有理数と違い、実数は本当に「たくさん」ある。直観的には、これで数直線上の数が「連続」して繋がったように思えるが、これを示すのはそう単純な話ではない。「実数の連続性」は定理として証明するものではなく、公理として出発点とするものだそう。大学の数学科が習う解析学は、この「実数の連続性公理」について何コマも掛けて学ぶ事から始めるそうだ。実数は実に奥が深い。

[1-2-5] 複素数 $\mathbb{C}$: 虚数の導入

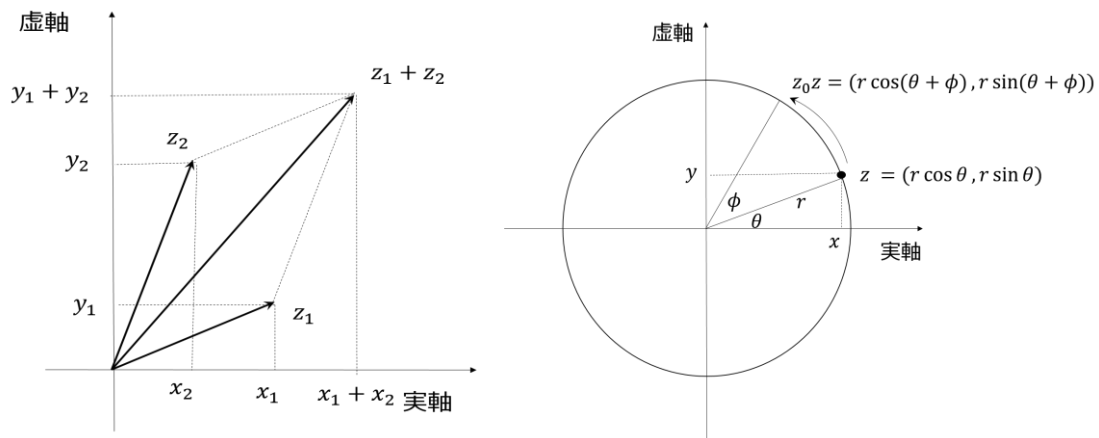
- いつ頃から？

当時 2 次方程式において判別式が負（すなわち実数解を持たない）となる場合は、解なし扱いとなっていた（欧州ではまだ負数が認められていない時代！）。

1545 年カルダーノが 3 次方程式の解の公式を発表（発見者は別の事）。2 次方程式と違い、少なくとも一つは必ず実数解を持つ 3 次方程式において、公式通りに解こうとすると実数解であったとしても途中どうしても虚数が登場せざるを得ない（最終的には複素共役なペアの和となり実数となる）事となった。当然抵抗はあったものの、その後オイラーやガウスを経て受け入れられるようになったらしい。

- 複素平面（複素数平面とも、ガウス平面とも呼ばれる）

複素数 $z = x + iy$ を横軸が実数、縦軸が虚数となる平面上にプロットしたもの。



図の左は複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ の和 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ を複素平面上で表しており、ベクトルの和としての性質がひと目で分かる。

また図の右は複素数の極形式（極座標表示）を示しており、

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し、大きさ 1 の複素数 $z_0 = \cos \phi + i \sin \phi$ との積を計算すると

$$\begin{aligned} z_0 z &= r\{(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)\} \\ &= r(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)) \end{aligned}$$

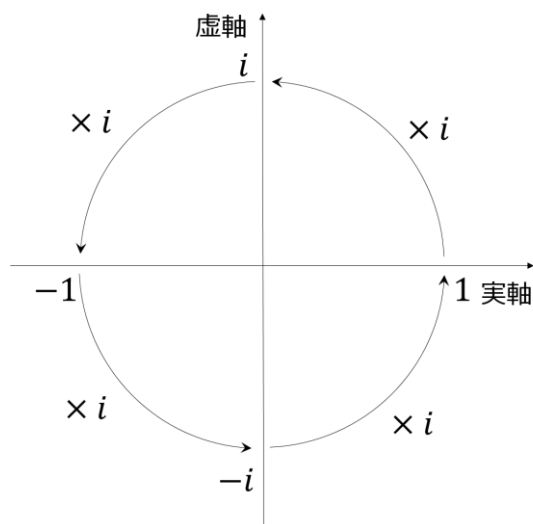
【第1講】イントロダクション

(最後は三角関数の加法定理を用いた)⁶

となるが、これが複素平面上での回転を表していることが分かる。

このように複素数は和がベクトルとしての性質をもち、積が回転を表す性質を持つ⁷。また複素平面は複素数の性質を可視化する手段としても大変有用である。

● 負数の積について



虚数単位 i を実数単位 1 に対して掛けると、

$i \times 1 = i$ さらに i を掛け続けていくと、

$i \times i = -1, i \times (-1) = -i, i \times (-i) = 1$ となるが、これを複素平面で表すと、左図のようにそれぞれ $\pi/2$ 回転に相当している事が分かる。これは大きさ 1 の複素数で偏角 $\theta = \pi/2$ としたとき $\cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$ となることから言える⁸。

自然数から整数へ拡張した際に、 $1 \times (-1) = -1$,

$(-1) \times (-1) = 1$ として負数の積を拡張したが、

$i^2 = -1$ であることから、 -1 の掛け算は実は複素平面上で π 回転しているとも見ることができ、このように解釈すれば、この負数の積の拡張はより一層自然な拡張であると解釈できる。

● 代数学の基本定理

複素数係数の代数方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$) は、複素数の解を(重複解を含め)ちょうど n 個持つ事が知られている。これはこれまで主に代数の式が解を持たない事により行われてきた数の拡張が、これでひと段落した事を示している。

[1-2-6] まとめ

数の拡張を例として数学の発展を見てきた。「抽象化」に伴い「数の本質」に迫ろうという数学の手法、そして「一般化、拡張」が数学の発展の原動力となっている事が感じられたと思う。また抽象的な複素数ではあるが可視化することで直観的にも分かりやすく、また「発展した立場から振り返る(負数の積)と、より一層理解が深まる」ことも感じられたと思う。

⁶ この辺が分かりにくかったら、第2講 初等関数で復習しよう。

⁷ ベクトルとしての性質は第3講 ベクトル にて、回転を表す性質は第2講 初等関数 にて学ぶ。

⁸ 虚数単位と実数単位の掛け算により回転を表すこの図は、第8講 回転の表現 II で大活躍する。

一方、有理数の濃度など、直観に反する事実も明らかとなり、必ずしも「直観的な理解」が正義というわけではない事例も見てもらえたと思う。本講座ではできるだけ直観的な理解を伴う説明を目指しはするが、限界もあり、また必ずしもそれが適切ではない場合もあることは知っておくべきである。

【第 1 講】イントロダクション

【1-3】付録：ギリシャ文字一覧

大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	upsilon
E	ε	epsilon	N	ν	nu	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

【第 2 講】初等関数

【2-1】はじめに

初等関数とは、代数関数（冪関数、多項式関数、有理関数など）、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数、双曲線関数、逆双曲線関数とそれらの合成関数で作られる 1 変数関数のことである。数学の各分野はもちろん、理工学のあらゆる分野において応用される重要な関数である。本講座では一部の例外を除き、実数の範囲内で取り扱う。本講では、そのうち特に重要な指数関数、対数関数、三角関数とその性質、およびオイラーの公式を導いてそれらの関係を学ぶ。

【2-2】指数・対数関数

【2-2-1】指数関数の定義と性質

実数を指数とした数（例えば $2^{\sqrt{2}}$ ）は、具体的にどのようにして求められるか考えたことがあるだろうか？実はこれはそれほど単純な話ではない。第 1 講 イントロダクションで触れたように、実数は実は奥が深い。

まずは 2 の自然数乗（正の整数乗：累乗）から始めよう。以下 $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$ とする。

2 を n 回掛け合わせた数を 2^n と表記し、2 の n 乗として定義する。

この時の 2 を**基数**、 n を**指数**という。

定義から $2^n \times 2^m = 2^{n+m}$, $(2^n)^m = 2^{nm}$ が、また $(2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ 等も成り立つ。

一般に非零の実数 $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ の累乗についても同様に

$$a^n \times a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{nm}, (ab)^n = a^n b^n$$

が成り立つ。

これらの性質が、指数が整数の場合でも成立するような拡張を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n \text{ より、} a^0 \equiv 1 \text{ また } a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \text{ より } a^{-n} \equiv 1/a^n$$

とすれば、 $p, q \in \mathbb{Z}$ とし、指数が整数の場合でも同様に

$$a^p \times a^q = a^{p+q}, (a^p)^q = a^{pq}, (ab)^p = a^p b^p$$

が成り立つ。またこの拡張により

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

も成り立つ。

指数が有理数の場合への拡張を考える。有理数でもこれらの性質が成り立つとすると、

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a \text{ より、} a^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{a} \text{ とすればよいが、それが実数の範囲内で値を持つとすると、} a > 0$$

【第2講】初等関数

という制限をつける事になる。その上で一般に $\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^p = a^{\frac{pq}{p}} = a^q$ より、 $a^{\frac{q}{p}} \equiv \sqrt[p]{a^q}$ とする事で、 $r, s \in \mathbb{Q}$ として、指数が有理数でも同様に $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ に対して

$$a^r \times a^s = a^{r+s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

が成り立つ。

指数が実数の場合への拡張は、一筋縄ではいかない。例として、 $2^{\sqrt{2}}$ を考える。

$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ と無限に続く小数であるが、これを

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356, $\dots$

として有限小数（有理数）の数列とみなし、

$2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, 2^{1.41421}, 2^{1.414213}, 2^{1.4142135}, 2^{1.41421356} \dots$ という数列を考える。

この数列は、

$$\begin{array}{rcl} 2^1 & = & 2 \\ 2^{1.4} & = & 2.63901582\dots \\ 2^{1.41} & = & 2.65737162\dots \\ 2^{1.414} & = & 2.66474965\dots \\ 2^{1.4142} & = & 2.66511908\dots \\ 2^{1.41421} & = & 2.66513756\dots \\ 2^{1.414213} & = & 2.66514310\dots \\ 2^{1.4142135} & = & 2.66514402\dots \\ 2^{1.41421356} & = & 2.66514413\dots \\ & \vdots & \end{array}$$

というように一定の値に近づいていく事がわかる。

このように、指数が実数の場合は、その実数に近づく有理数の数列を用い、有理数乗の数列の極限として定義することになる⁹。

このような定義により、 $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ に対しても

$$a^x \times a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

が成り立つ。これらの基本となる性質を**指数法則**という。

指数が実数にまで拡張され、任意の実数により連続した指数に対する値が得られるようになった。

基数 $a = 1$ の場合、全ての x に対して $1^x = 1$ となるため、それ以外の $0 < a < 1$ の場合と、

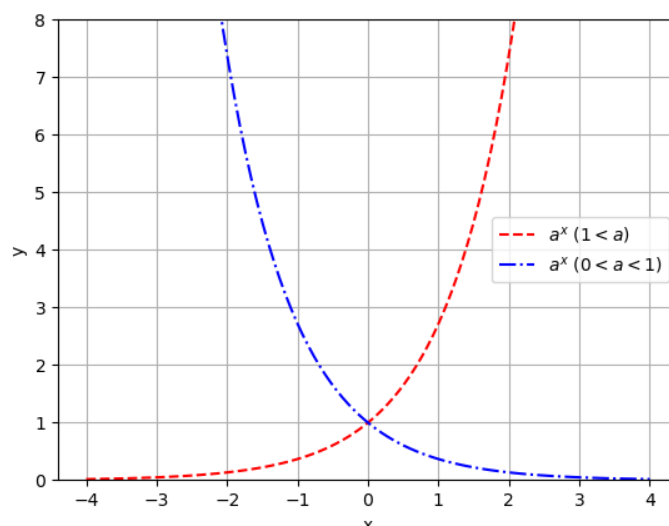
$1 < a$ の場合の a^x を**指数関数**として定義する。このときの a は基数でなく**底**と呼ばれる。

⁹ 4 節にて違う定義を導く

指数法則より得られる指数関数の基本性質として

- $1 < a$ の場合
 - ・ 単調増加関数
 - ・ $x \rightarrow -\infty$ で x 軸に漸近
 - ・ $x = 0$ の時、 $a^0 = 1$
- $0 < a < 1$ の場合
 - ・ 単調減少関数
 - ・ $x \rightarrow \infty$ で x 軸に漸近
 - ・ $x = 0$ の時、 $a^0 = 1$

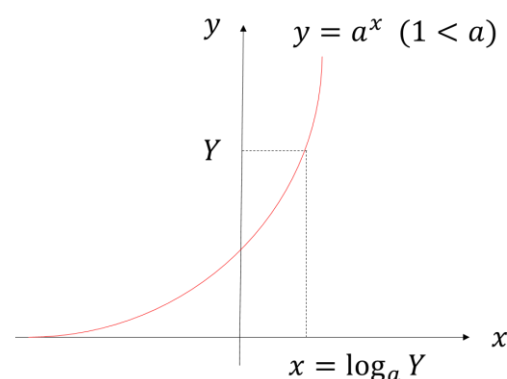
また定義域は実数全体、値域は正の実数全体となる。右図は指数関数 $y = a^x$ のグラフの例であり、上記の基本的な性質が読み取れる。



[2-2-2] 対数関数の定義と性質

指数関数 a^x は全ての正の実数を値域にとり、
 $0 < a < 1$ ならば単調減少関数、 $1 < a$ ならば単調増加関数であるため、任意の正の実数 Y に対して、 $Y = a^x$ となる実数 x がただ一つ定まる。

この x を、 Y に対する a を底とする**対数**といい
 $x = \log_a Y$ と表す。このときの Y を**真数**という。



定義より、対数は指数法則に対応した以下の性質をもつ。

$a, Y, Z \in \mathbb{R}, \quad a > 0, a \neq 1, Y, Z > 0$ に対し

$$(i) \quad \log_a YZ = \log_a Y + \log_a Z$$

$y = \log_a Y, z = \log_a Z$ とすると $Y = a^y, Z = a^z$ であり、 $YZ = a^y a^z = a^{y+z}$

$$\therefore \log_a YZ = y + z = \log_a Y + \log_a Z \quad \blacksquare$$

$$(ii) \quad \log_a \frac{Y}{Z} = \log_a Y - \log_a Z$$

$y = \log_a Y, z = \log_a Z$ とすると $Y = a^y, Z = a^z$ であり、 $Y/Z = a^y/a^z = a^{y-z}$

$$\therefore \log_a \frac{Y}{Z} = y - z = \log_a Y - \log_a Z \quad \blacksquare$$

$$(iii) \quad \log_a Y^t = t \log_a Y$$

$y = \log_a Y$ とすると $Y = a^y$ であり、 $Y^t = (a^y)^t = a^{yt}$

$$\therefore \log_a Y^t = yt = t \log_a Y \quad \blacksquare$$

【第2講】初等関数

また $b \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1$ に対し底の変換公式と呼ばれる以下の性質をもつ。

$$(iv) \quad \log_a Y = \frac{\log_b Y}{\log_b a}$$

$$y = \log_a Y, z = \log_b Y, a = b^t \text{ とすると } t = \log_b a, Y = b^z = a^y = (b^t)^y = b^{ty}, \therefore z = ty$$

$$\text{よって } y = \frac{z}{t} \text{ より } \log_a Y = \frac{\log_b Y}{\log_b a} \quad \blacksquare$$

このように定義された対数に対し、 $y = \log_a x$ として**対数関数**を定義する。

定義より $y = \log_a x$ に対して $x = a^y = a^{\log_a x}$ また $y = \log_a x = \log_a a^y$ となり、

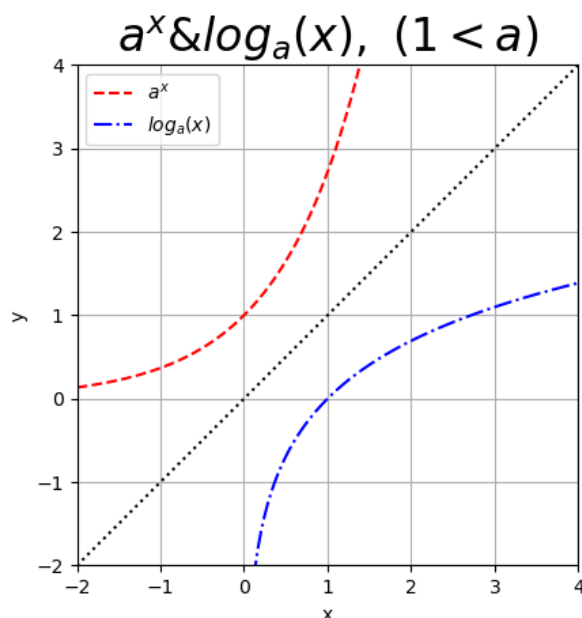
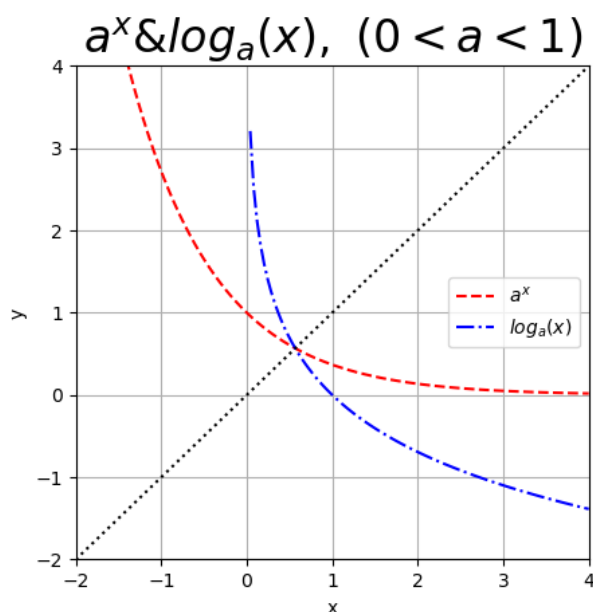
$y = \log_a x$ と $y = a^x$ は互いに逆関数となる。

これらの定義により、対数関数は以下の性質を持つ。

底 $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ に対し

- ・ $0 < a < 1$ のとき 単調減少関数
- ・ $1 < a$ のとき 単調増加関数

定義域は正の実数、値域は実数全体であり、 $x = 1$ のとき $\log_a 1 = 0$ となる。



上の図は底 a が $0 < a < 1$ の場合と $1 < a$ の場合の対数関数と指数関数のグラフの例で、上記性質の他、それぞれ $y = x$ の点線に対して対称となっており逆関数の関係であることも読み取れる。

底 a の対数関数とは何かを一言で言うと、「 $(a$ 進数としたときの) 桁数を返す関数」となる。

[2-2-3] 自然対数と自然指数

有用な対数の底として、**ネイピア数**と呼ばれる e が挙げられる。

ネイピア数 e は、

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (2-2-1)$$

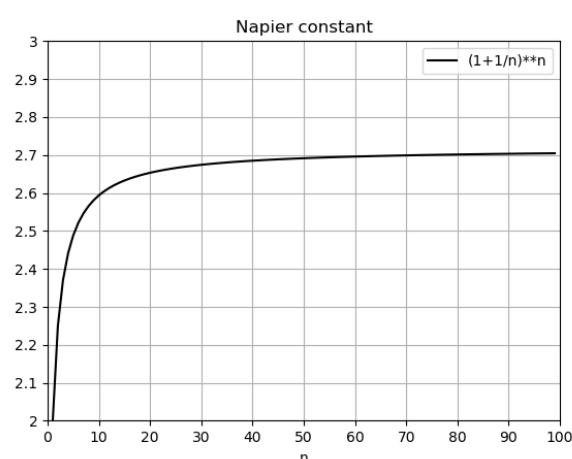
で定義される無理数で、その値は

$$e = 2.71828182846 \dots \quad (2-2-2)$$

となる。

ここで(2-2-1)式は、正の整数 n による $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の値が、 n がどんどん大きくなっていくにつれ一定の値（この場合は(2-2-2)の値)に近づいて行くときの「**極限**」を表しており、記号 $\lim$ は **limit** と読む。

右図は $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の値を n が1から100までの範囲でグラフ化したもので、次第に近づいていく様子が見られる。



ネイピア数 e を底とする対数は、**自然対数**と呼ばれ、通常 $\log_e x = \ln x$ と表記される。また通常「指数関数」はネイピア数を底とした e^x の事を指す事が多い。この e^x は $\exp(x)$ と書かれ、自然対数との対比で自然指数と呼ぶ事もある。

「自然」という言葉は、指数関数 e^x が微分しても（従って積分しても）同じ e^x となるなど、数学的な性質が他の底と比べてシンプルな事から来ており、数学や物理学を始め、理工系の殆どの分野で用いられている。

[2-2-4] 応用例

上記のように指数関数は解析学との関わりが深く、微分の考え方をういた微分方程式（パラメータを時間だとすると、今の情報から少し先の未来がどうなるかを記述する方程式）を解く際に活躍してくれる。また対数関数は、（指数関数の）裏方さんの役割が多いが、人間の知覚や地震のマグニチュードなどの他、「エントロピー」を表し物理学の統計力学や情報理論などの分野で応用されている。

【2-3】三角関数

【2-3-1】三角関数の定義と性質

右図のように半径1の単位円上の点 (x, y) において
 原点と結んだ直線と x 軸との反時計回りを正とした
 なす角（弧度法）を θ とし、その大きさは $\pm\pi, \pm2\pi$
 を超えてもそのまま外挿されるとする時

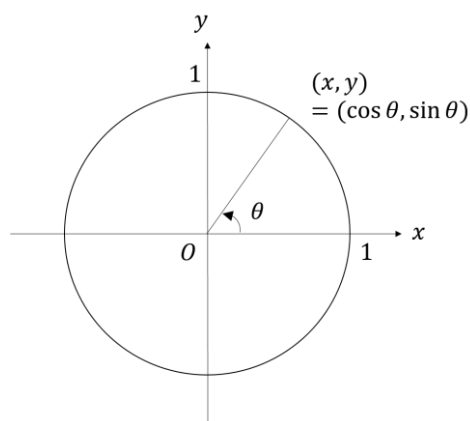
$$\sin(\text{正弦:サイン}) : \sin \theta = y$$

$$\cos(\text{余弦:コサイン}) : \cos \theta = x$$

として、また $x \neq 0$ の時、

$$\tan(\text{正接:タンジェント}) : \tan \theta = y/x$$

として定義する。これらを**三角関数**といい、以下の基本的な性質をもつ。



定義より $\sin \theta, \cos \theta$ は 2π の周期、
 $\tan \theta$ は π の周期を持つ周期関数、
 すなわち以下の関係が成り立つ($n \in \mathbb{Z}$)。

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2n\pi) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) &= \cos \theta \\ \tan(\theta + n\pi) &= \tan \theta \end{aligned}$$

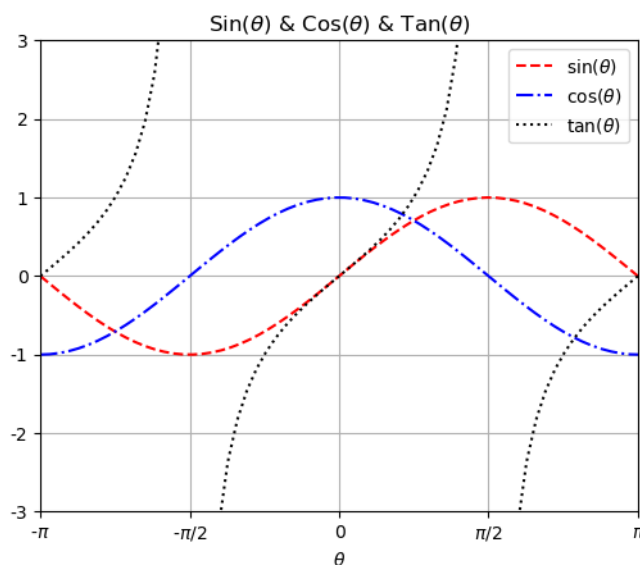
$\sin \theta, \cos \theta$ の定義域は実数全体、
 値域は -1 以上 1 以下の実数となり、
 $\sin \theta$ は奇関数 ($\sin(-\theta) = -\sin \theta$)
 $\cos \theta$ は偶関数 ($\cos(-\theta) = \cos \theta$)
 である。

また定義よりいわゆる位相のずれとして

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

が成り立つ。

$\tan \theta$ の定義域は $\frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) を除く実数全体、値域は実数全体であり、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で
 単調増加関数となる。



【2-3-2】三角関数の主な公式

上記基本性質の他に、以下のような性質が公式化されている。このうち加法定理が最も
 基本的な性質であり、他は加法定理（と上記基本性質）から容易に導かれる。

ここでは各公式を列挙し、その証明は本講の付録4に記載する。

●加法定理（複号同順）（角の和の三角関数を元の角の三角関数で表す）

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\
 \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}
 \tag{2-3-1}$$

●倍角の公式（2倍角の三角関数を元の角の三角関数で表す）

$$\begin{aligned}
 \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\
 &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\
 \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}
 \end{aligned}
 \tag{2-3-2}$$

●半角の公式（半角の三角関数を元の角の三角関数で表す）

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\
 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\
 \tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}
 \end{aligned}
 \tag{2-3-3}$$

●積和の公式（三角関数の積を三角関数の和で表す）

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \\
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \\
 \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}
 \end{aligned}
 \tag{2-3-4}$$

●和積の公式（三角関数の和を三角関数の積で表す）

$$\begin{aligned}
 \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
 \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\
 \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
 \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2-3-5}$$

●合成の公式（同じ角の三角関数の和を一つの三角関数で表す）

$$\begin{aligned}
 a \sin \theta + b \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \\
 \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 a \sin \theta + b \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta) \\
 \sin \beta &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2-3-6}$$

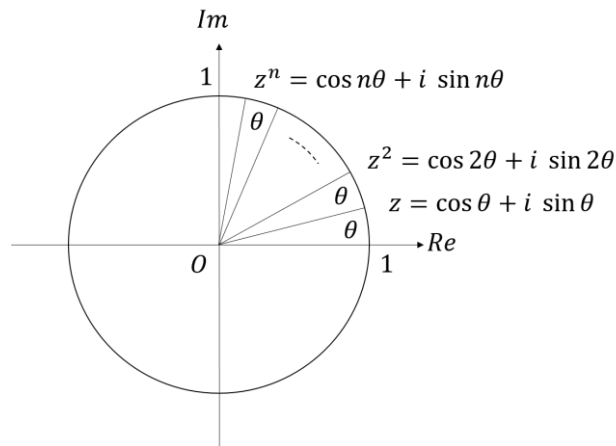
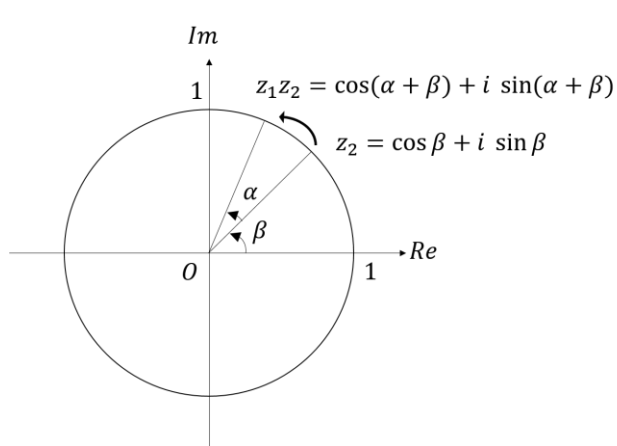
[2-3-3] ド・モアブルの定理

複素平面上の大きさ1の複素数の極形式 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を考える。これは単位円上の点の x, y 座標値として定義された三角関数を複素平面上にそのまま対応させたものとなる。

この表記での複素数 $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$ の積は、加法定理を用いると

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (2-3-7)$$

となり、これは大きさ1の複素数の積がその偏角の和の複素数となる事を意味し、加法定理が複素平面上でこのように表されていることになる。幾何学的には大きさ1、偏角 α の複素数の積が複素平面上での角度 α の回転を表していると解釈できる（下図左）。



特に $\alpha = \beta = \theta$ の場合は、

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta \end{aligned}$$

となり、2倍角の公式を表すと共に、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ という関係となる。

さらに(2-3-7)式で $\alpha = \theta, \beta = 2\theta$ とすると、これは $\cos \theta + i \sin \theta$ の3乗にあたり、

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + i(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) \\ &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \end{aligned}$$

となり、3倍角の公式を表し、また $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$ が成り立つ。

より高次についても同様となり、帰納的に以下の関係が成り立つ事が分かる（上図右）。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (2-3-8)$$

これをド・モアブルの定理という。

【2-3-4】応用例

三角関数は幾何学とのつながりが深く、周期性を利用した回転や振動、波動の表現として用いられている。またベクトルの基底としてフーリエ級数展開への応用も本講座でも説明する。

【2-4】指数関数の別定義

ネイピア数の定義 (2-2-1) 式を深掘りしてみよう。今、 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ という式を考える。 $\frac{x}{n} = \frac{1}{m}$ とすると $n = mx$ より $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} = \left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right\}^x$ と書いて、この式で x を一定とした $n \rightarrow \infty$ すなわち $m \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right\}^x \rightarrow (e)^x$ ($m \rightarrow \infty$) がいえることになる。そこで以下の式を指数関数の新たな定義としよう ($x = 1$ の場合はネイピア数の定義に帰着する)。

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (2-4-1)$$

この定義が意味をなすには、まず極限值が収束する必要がある¹⁰。

この極限值を評価するため、有限項 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ について考えてみよう。このような $(a + b)^n$ の形の式を展開するには、二項定理を用いる¹¹。展開すると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left(\frac{x}{n}\right)^4 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!}x^3 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{4!}x^4 + \dots \end{aligned}$$

となる。各分子の括弧内の $1/n$ や $2/n$ 等の項は $n \rightarrow \infty$ の極限で 0 となるので、その極限で各分子は 1 となり

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \end{aligned} \quad (2-4-2)$$

となる (この級数は任意の x の値で収束する事が知られている)。実際にこの級数のふるまいを見てみよう (次頁にて)。

¹⁰ 指数関数を初めてこの形で定式化したのが、オイラーだったそう。厳密には極限值が収束するうえに、この定義に基づき、指数法則が成り立つことを示す必要がある。

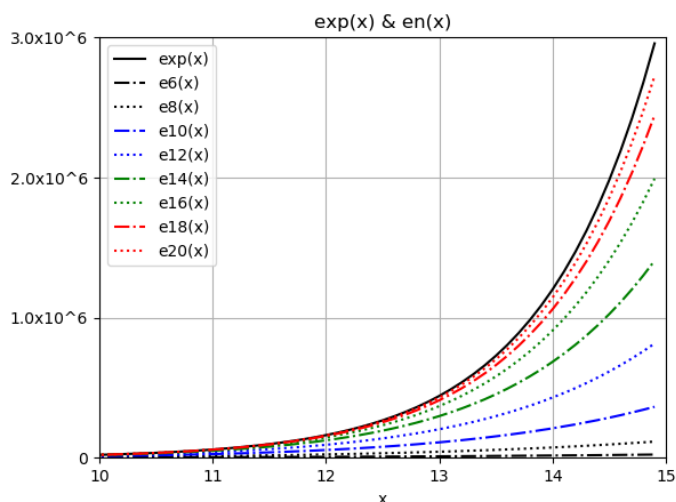
¹¹ 付録 1：二項定理 (二項展開) 参照

【第2講】初等関数

右図は(2-4-2)式の右边を

$e_n(x) \equiv 1 + x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$ として、 n 次の項までの和で近似したときの様子を20次の項までグラフ化したものであり、次第に $\exp(x)$ の値に近づいていく様子が分かる。

(2-4-1)式 (あるいは(2-4-2)式) で底 e の指数関数 e^x を定義することで、わざわざ e の有理数乗の極限という形を経ずに実数乗を直接定義することができることになる。



なお(2-4-2)式は、指数関数 e^x の $x = 0$ の周りでのいわゆるテーラー展開 (マクローリン展開) の結果と等しいが、指数関数の場合、微分を使わなくともこのように二項展開した極限として得ることができる。

【2-5】[▼A] オイラーの公式

(2-3-8)式のド・モアブルの定理 $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ において、 $n\theta = x$ と置くと $\theta = \frac{x}{n}$ と書けるので、

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \right)^n \quad (2-5-1)$$

と書ける。この式で x を一定とする $n \rightarrow \infty$ ($\theta \rightarrow 0$) の極限をとることを考えると、

$$\cos \frac{x}{n} \rightarrow 1, \quad \sin \frac{x}{n} \rightarrow \frac{x}{n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2-5-2)$$

より¹²、

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n \end{aligned} \quad (2-5-3)$$

と書けるが、この式は(2-4-1)式で x を (形式的に) ix としたものと等しい。

そこで、(2-4-2)式で x を ix として置き換え、指数が純虚数となる指数関数を

¹² 付録3: $\sin \theta / \theta \rightarrow 1$ ($\theta \rightarrow 0$) の証明 参照

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \quad (2-5-4)$$

として定義する¹³。これにより、

$$e^{i\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n$$

と書いて、これと(2-5-3)式と合わせると

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2-5-5)$$

が成り立つ¹⁴。

この(2-5-5)式は、有名な**オイラーの公式**と呼ばれるもので、指数関数と三角関数の驚くべき関係を端的に表している。

オイラーの公式により、三角関数の加法定理である(2-3-7)式：

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

は、

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (2-5-6)$$

となり、純虚数での指数法則が成り立つことを意味する。

これにより逆に三角関数の加法定理を瞬時に出せる（証明できるという意味ではない）。

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) + i \sin(\alpha \pm \beta) &= e^{i(\alpha \pm \beta)} = e^{i\alpha} e^{\pm i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta \pm i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta) \\ \therefore \begin{cases} \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \end{aligned}$$

またド・モアブルの定理 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ は、

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (2-5-7)$$

と書けることになり、これも指数法則の純虚数への拡張に対応している（ただし n は整数）。

オイラーの公式による指数関数と三角関数の繋がりは、指数関数の基本性質である指数法則と、三角関数の基本的な性質である加法定理、ド・モアブルの定理としても繋がっているという深いつながりであることが分かる。解析学と幾何学の橋渡しを担う重要な役割をもつ。

本講座では第6講で行列版、第8講でクォータニオン版として各講の付録にて再登場する。

¹³ この辺りの話をきちっとする解析接続というモノがあるが、本講座では立ち入らない

¹⁴ (2-5-4) 式において $i^2 = -1$ より (2-5-5) 式と実部・虚部を比較して以下も成り立つ。

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \dots \\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots \end{cases} \quad (2-5-8)$$

【2-6】付録1：二項定理（二項展開）

$(a+b)^n$ を展開したものを**二項展開**と言う。二項展開の各項の係数を考えるにあたり、まずは n の値が小さい場合に実際に展開してみよう。

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

係数のみに注目すると

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1\end{array}$$

といういわゆるパスカルの三角形と呼ばれるものになる。この三角形をなす各数は、それぞれ左上、右上の数の和となっている（左端は右上のみ、右端は左上のみの数をそのまま受け継ぐ）。

実際、 $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$ を展開すれば、 a^4 となるのは $a \times a^3$ の組み合わせのみ。 a^3b となるのは $b \times a^3$ と $a \times 3a^2b$ の組み合わせで、その係数は 1 と 3 を合わせた 4 となる。また a^2b^2 となるのは $b \times 3a^2b$ と $a \times 3ab^2$ の組み合わせで、その係数は 3 と 3 を合わせた 6 となり、このような関係が一般に成り立つことになる。

このことを、展開後の各項の係数を $c_k^{(n)} a^{n-k} b^k$ のようにして数式で表すと以下ようになる。

$$(a+b)^n = c_0^{(n)} a^n + c_1^{(n)} a^{n-1} b + c_2^{(n)} a^{n-2} b^2 + \cdots + c_{n-1}^{(n)} a b^{n-1} + c_n^{(n)} b^n$$

および

$$(a+b)^{n+1} = c_0^{(n+1)} a^{n+1} + c_1^{(n+1)} a^n b + c_2^{(n+1)} a^{n-1} b^2 + \cdots + c_n^{(n+1)} a b^n + c_{n+1}^{(n+1)} b^{n+1}$$

に対して

$$c_0^{(n+1)} = c_0^{(n)} (= c_0^{(0)} = 1), \quad c_k^{(n+1)} = c_{k-1}^{(n)} + c_k^{(n)}, \quad c_{n+1}^{(n+1)} = c_n^{(n)} (= c_0^{(0)} = 1) \quad (2-6-1)$$

という関係が任意の $n > 0$ に対して成り立つ。

この二項展開の一般項を表すものが**二項定理**と呼ばれるもので、以下のような式となる¹⁵。

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k \quad (2-6-2)$$

$(a+b)^n$ は $(a+b)$ が n 個掛け合わされたものであり、展開された際の $a^{n-k} b^k$ の項は、 n 個ある $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ の中から k 個の b を選ぶ組み合わせの数だけあることになるので（選ばれなかった $n-k$ 個からは必ず a が選ばれる）その係数は「 n 個の中から k 個を取り出

¹⁵ 式の右辺は総和記号と呼ばれるもので表されている。付録2：総和記号 参照

す組み合わせの数」を表す ${}_nC_k$ ($\binom{n}{k}$ とも書かれる) となり、(2-6-2)式を得る。

この ${}_nC_k$ の値は以下のようにして求まる。

n 個から k 個を取り出す最初の 1 個目は n 通りの選び方があり、2 個目は $n-1$ 通り、最後の k 個目は $n-k+1$ 通り選び方があり、組み合わせると $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ 通りとなるが、 k 個を取り出す順番にはよらないので、最終的な値は ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 通りとなる。

(2-6-1) 式の $c_k^{(n)}$ は (2-6-2) 式の ${}_nC_k$ に対応するものであり、(2-6-1) 式が $c_k^{(n)} = {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ として実際に成り立つことは $0! \equiv 1$ に注意して以下のように示される。

$${}_{n+1}C_0 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1, \quad {}_nC_0 = \frac{n!}{n!0!} = 1, \quad {}_{n+1}C_{n+1} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1, \quad {}_nC_n = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

$$\begin{aligned} {}_{n+1}C_k &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!k!} = \frac{\{(n-k+1)+k\}n!}{(n-k+1)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = {}_nC_k + {}_nC_{k-1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【2-7】付録2：総和記号

数列の総和を示す記号を**総和記号**といいギリシャ文字の大文字の Σ （シグマ）で表す。

通常以下のように

$$\sum_{i=1}^n a_i \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を意味する。 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ の表記は具体的ではあるが、式中で頻繁に出てくると冗長で式全体の可読性を損なうため、このようなコンパクトな表記法が存在する。慣れると式の見通しが良くなりとても便利（かつ、めっちゃ強力）なので、ぜひ慣れて頂きたい。本講座内でもよく使われる。

総和記号の主な性質をあげた。比較的複雑な式の場合、これらを駆使して式変形が行われる。

(i) 線形性

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i, \quad \sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

(ii) 和の順番

基本的には内側から順に和を取る。以下はその例で

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_j &= \sum_{i=1}^n (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) \\ &= (a_1) + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \end{aligned}$$

【第2講】初等関数

(iii) 多重和の交換（和の順番の入れ替え）

((ii) 和の順番 の例のように添字の範囲に依存性がある等の場合を除き)

添字が独立している場合（有限和では）和の順番に依らない。

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

例) 以下の2式は等しい

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} &= \sum_{i=1}^2 (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ij} &= \sum_{j=1}^3 (a_{1j} + a_{2j}) = (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) \end{aligned}$$

応用) 添字の範囲が共通な場合など、一つの総和記号に複数の添字をまとめる略記法

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

(iv) 和の対象の分解・結合

乗法の分配則: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ に基づく

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j$$

例) 以下の2式は等しい

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_i \sum_{j=1}^3 b_j &= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_i b_j &= \sum_{i=1}^2 (a_i b_1 + a_i b_2 + a_i b_3) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 \end{aligned}$$

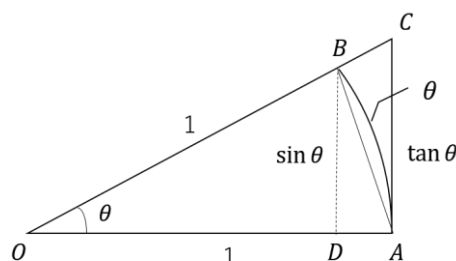
【2-8】付録3: $\sin \theta / \theta \rightarrow 1$ ($\theta \rightarrow 0$) の証明

$0 < \theta < 1$ の時に $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ ($\theta \rightarrow 0$) となることを示す。

図は $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 1$ 内角 θ の扇型 OAB で、 B から $\overline{OA}$ に下ろした垂線の足を D 、 A から伸ばした接線と $\overline{OB}$ を伸ばした直線との交点を C とする。

図より $|\overline{BD}| = \sin \theta$ 、 $|\overline{CA}| = \tan \theta$ となる。

$\triangle OAB$, 扇型 OAB , $\triangle OAC$ の面積はそれぞれ $\frac{1}{2} \sin \theta$, $\frac{1}{2} \theta$, $\frac{1}{2} \tan \theta$ となり、図よりその大小関係は $\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$ となる。これにより $\sin \theta < \theta$ および $\theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ がいえて、これからさらに $\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$ がいえ、 $\theta \rightarrow 0$ のとき $\cos \theta \rightarrow 1$ と、はさみうちの原理より $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ となる。■
またこれにより $\cos \theta \rightarrow 1$, $\sin \theta \rightarrow \theta$ ($\theta \rightarrow 0$) となることがいえる。



【2-9】付録4：三角関数の各公式の証明

○加法定理（2-3-1）式の証明

【証明】

図のように単位円上の2点A,Bをx軸からのなす角が α, β となるようにとると、それぞれの座標値は $A(\cos \alpha, \sin \alpha), B(\cos \beta, \sin \beta)$ となる。 $\overline{AB}$ の長さの2乗は余弦定理により

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos(\alpha - \beta) \\ &= 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) \\ &= 2(1 - \cos(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

一方、座標値によっても求められ

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \\ &\quad - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta \\ &= 2\{1 - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)\} \\ \therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\#1) \end{aligned}$$

(#1)式より

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\{\alpha - (-\beta)\} \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\#2) \end{aligned}$$

基本性質 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ および (#1)式より

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} \\ &= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\#3) \end{aligned}$$

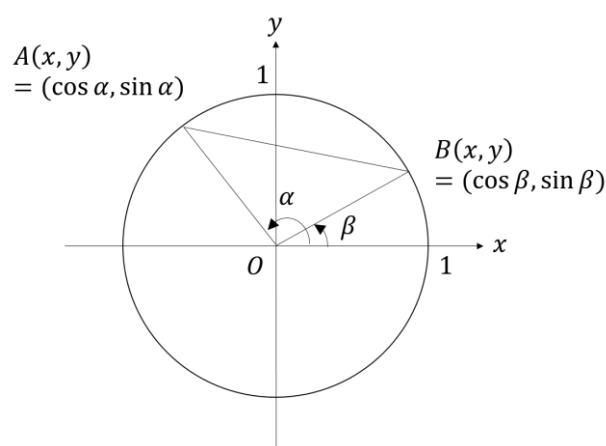
(#3)式より

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\{\alpha + (-\beta)\} \\ &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\#4) \end{aligned}$$

(#1),(#2),(#3),(#4)式より

$$\begin{aligned} \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (\#5) \end{aligned}$$

以上、(#1),(#2),(#3),(#4),(#5)式より（2-3-1）式は示された。■



【第2講】初等関数

○倍角の公式 (2-3-2) 式の証明

【証明】

加法定理 (2-3-1) において、 $\beta = \alpha$ とする。

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (\#1)$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ も用いて

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (\#2) \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (\#3)$$

以上、(#1),(#2),(#3)式より (2-3-2) 式は示された。■

○半角の公式 (2-3-3) 式の証明

【証明】

倍角の公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ において、 $\alpha \rightarrow \alpha/2$ に置き換えると

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

それぞれ整理して

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (\#1)$$

この(#1)式を辺々割ると

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (\#2)$$

以上、(#1),(#2)より (2-3-3) 式は示された。■

○積和の公式 (2-3-4) の証明

【証明】

加法定理 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ を
辺々足すと $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \quad (\#1)$$

加法定理 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ を
辺々足すと $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \quad (\#2)$$

同様に辺々引くと $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

$$\therefore \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \quad (\#3)$$

以上、(#1),(#2),(#3)より (2-3-4)式は示された。■

○和積の公式 (2-3-5) の証明

【証明】

積和の公式 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$ に、 $\alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2} (\sin x + \sin y) \\ \therefore \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (\#1) \end{aligned}$$

同様に $\alpha = \frac{x-y}{2}, \beta = \frac{x+y}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} \right) + \sin \left(\frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2} (\sin x + \sin(-y)) \\ \therefore \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (\#2) \end{aligned}$$

積和の公式 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$ に、 $\alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2} (\cos x + \cos y) \\ \therefore \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (\#3) \end{aligned}$$

積和の公式 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$ に、 $\alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) - \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) \right\} = -\frac{1}{2} (\cos x - \cos y) \\ \therefore \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (\#4) \end{aligned}$$

以上、(#1),(#2),(#3),(#4)により (2-3-5) 式は示された。■

【第2講】初等関数

○合成の公式 (2-3-6) の証明

【証明】

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right)$$

となるが、 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ なので、ある角 α, β ($-\pi \leq \alpha, \beta \leq \pi$) を用いて

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$ または $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \beta$
と書くことができる。

以下、加法定理を用いると

前者の場合

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

後者の場合

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \beta \sin \theta + \cos \beta \cos \theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta)$$

となる。以上により (2-3-6) 式は示された。■

【第3講】ベクトル

【3-1】はじめに

ベクトルは、言うまでもなく理学・工学あらゆる分野で応用されており、その性質を理解し使いこなせることが求められる。また幾何ベクトルとしてのベクトルだけでなく、抽象化することで他にもさまざまなモノがベクトルとして認識され、ベクトルで得られた様々な知見が応用されている。ベクトルの概念はもともと線形性¹⁶を持っており、行列と共に線形代数の基礎をなし、応用範囲はさらに広がっている。

本講では、まず幾何ベクトルの性質を振り返り、抽象化の結果ベクトルとして仲間入りした例を紹介、またベクトルの線形性にも着目しながら線形代数の基礎の基礎を学んでいく。

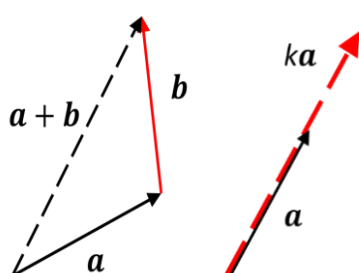
【3-2】ベクトルがもつ性質

【3-2-1】ベクトル自体がもつ性質

幾何ベクトルとは、平面あるいは空間内の「大きさ」と「向き」を持った量とされ、始点 P から終点 Q へ向かう「有向線分」 $\overrightarrow{PQ}$ として定義された。また互いに大きさと向きが等しい（つまり平行移動して一致する）ベクトルは同一視されることから、始点や終点を省略した $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ などとも表記していた。

これから幾何ベクトル以外にもベクトルの概念を広げていくので、ベクトルを表す記号を $\mathbf{a}$ のように太文字で書き、以降特に必要のない限り、統一して用いることとする。

幾何ベクトルに対し、以下のような演算：**加法**と**スカラー積**が定義される。



・加法：ベクトル $\mathbf{a}$ の終点に、加えるベクトル $\mathbf{b}$ の始点を一致させるように平行移動させたとき、 $\mathbf{a}$ の始点から $\mathbf{b}$ の終点に向かうベクトルとして定義され、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と表す。

・スカラー積：ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさを k 倍(実数)したものとなる。
 $k < 0$ の場合：逆向き、 $k = 0$ の場合：零ベクトルとなる。

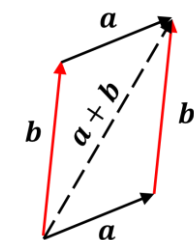
加法： $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ スカラー積： $\mathbf{a} \rightarrow k\mathbf{a}$

当たり前過ぎて意識しないが、この加法とスカラー積を任意のベクトルに対して行った結果がまたベクトルとなるという閉じた演算になっている点が重要となる。

加法には以下の性質がある事が図により示される。

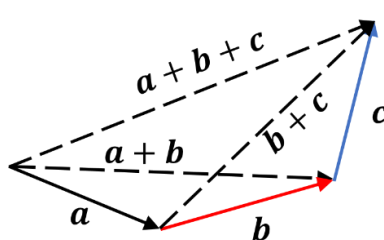
¹⁶ 例：関数 $f(x)$ が $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(kx) = kf(x)$ という性質を持つとき、線形であるという

【第3講】ベクトル



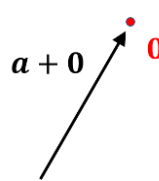
交換則

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$



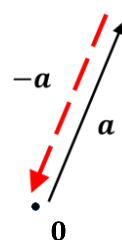
結合則

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$



零ベクトルの存在

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$



逆ベクトルの存在

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

またスカラー積には以下の性質がある事が下図により示される。

これらをまとめた結果が以下となる。

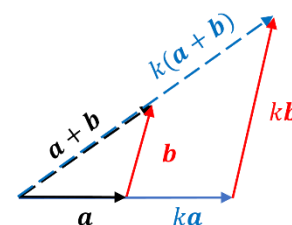
●幾何ベクトルの性質

加法

- (i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (交換則)
- (ii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (結合則)
- (iii) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (零ベクトルの存在)
- (iv) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (逆ベクトルの存在)

スカラー積

- (v) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ (分配則)



分配則

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

(3-2-1)

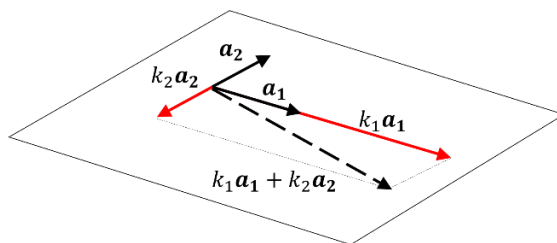
[3-2-2] ベクトルの組がもつ性質

●線形結合 (または一次結合) の定義

ベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ とスカラー $k_1, k_2, \dots, k_m$ において、以下のようなスカラー積されたベクトルの和をこれらのベクトルの ($k_1, k_2, \dots, k_m$ を係数とする) **線形結合** (一次結合) という。

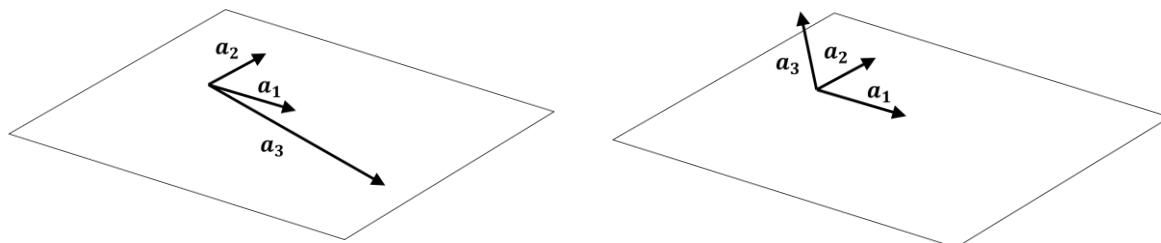
$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_m\mathbf{a}_m \quad (3-2-2)$$

例として3次元空間内で考えてみる。図は3次元空間における2本のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ での、係数 k_1, k_2 による線形結合を示している。図をみると、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が「乗っている」平面上に $k_1\mathbf{a}_1, k_2\mathbf{a}_2, k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$ の各ベクトルが全て同様に「乗っている」ことが直観的に分かる。



また係数 k_1, k_2 の値を連続的に変化させていけば、線形結合されたベクトル $k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2$ がその平面上の全ての点を「指しそうだ」という事も見て取れる。この場合ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が「張る」平面という表現をする。

ここでもう一本のベクトル $\mathbf{a}_3$ を加えてみる。



上図の左側では $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が張る平面上にあり、右側では平面上にない向きをもつとする。

新たな線形結合 $k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3$ は左側と右側で明らかに異なる結果となる。

左側では、ベクトル $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の線形結合で表され ($\mathbf{a}_3 = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2$ となる、少なくともどちらかは0でない k_1, k_2 が存在する)、3本のベクトルは $\mathbf{a}_3$ が加わる前と同じ平面を張る。

右側では、ベクトル $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の線形結合で表すことができず ($\mathbf{a}_3 = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2$ となる k_1, k_2 が存在しない)、3本のベクトルは $\mathbf{a}_3$ が加わる前と異なり3次元空間を張ることになる。

この違いを以下のように定式化する。

●線形独立と線形従属（または一次独立、一次従属）

あるベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ に対して、スカラー $c_1, c_2, \dots, c_m$ を用いて

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \quad (3-2-3)$$

という式を考えると、この式は

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0 \quad (3-2-4)$$

という自明な解を持つが、(3-2-3)式が

- ・唯一この自明な解(3-2-4)しか持たない場合：

これらのベクトルの組は**線形独立**（一次独立）であるという。

- ・そうでない場合（他に解をもつ場合）：

これらのベクトルの組は**線形従属**（一次従属）であるという。

定義よりベクトルの組の中に零ベクトルが一つでもあると線形従属となることに注意。

線形結合の例であげた3本のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ について、このことを確認してみよう。

まずこの例の $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は線形独立であることがわかる。もし線形従属なら、 $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ の式は、 c_1, c_2 の少なくともどちらかは0でない事になり、これは $\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{a}_2$ または $\mathbf{a}_2 = -\frac{c_1}{c_2} \mathbf{a}_1$ と書けることを意味している。これでは「平面」を張ることはできないので、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は線形独立である。これに $\mathbf{a}_3$ を加えた場合、次のようになる。

【第3講】ベクトル

左側の例では、少なくともどちらかは 0 でない k_1, k_2 を用いて $\mathbf{a}_3 = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2$ と表すことができた。これは $k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ と書けるので、(3-2-3)式が $c_1 = k_1, c_2 = k_2, c_3 = -1$ という解を持つことを意味している。従って左側の例は線形従属となる。

右側の例で、 $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + c_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を考える。もし $c_3 \neq 0$ なら、 $\mathbf{a}_3 = -\frac{c_1}{c_3} \mathbf{a}_1 - \frac{c_2}{c_3} \mathbf{a}_2$ と書け、 $\mathbf{a}_3$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の線形結合で表せないことに矛盾、従って $c_3 = 0$ となり、 $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ を得るが、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は線形独立だったので $c_1 = c_2 = 0$ となる。従って右側の例は線形独立となる。

●基底、次元、座標系

上記の例のように線形独立なベクトルの組は、線形結合により2本なら「平面」を、3本なら「空間」を張る。この線形独立なベクトルの組が「平面」や「空間」上の任意のベクトルを線形結合で表せるとき、「平面」や「空間」の**基底**と呼ぶ。この線形結合での表し方は一意となる。

・線形独立なベクトルの組によるベクトルの線形結合での表し方は一意 (3-2-5)

$\because \mathbf{a} = c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = c'_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c'_n \mathbf{a}_n$ のとき $(c_1 - c'_1) \mathbf{a}_1 + \cdots + (c_n - c'_n) \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ となり
 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形独立なので $c_1 - c'_1 = 0, \dots, c_n - c'_n = 0 \therefore c'_1 = c_1, \dots, c'_n = c_n$ がいえる。■

また張られる「平面」や「空間」に対して基底のとり方は無数にあるが、どのようなとり方をしてもその数は同じであり、この数を**次元**という。上記は4次元以上の高次元でも成り立つ。

n次元空間の各点を指すベクトルを基底の線形結合で表すとその係数は一意となるので、この係数の組を用いて各点を表すことができる。これを**座標系**といい、その係数の組を**座標値**という。ここまで幾何ベクトルの場合、暗に直交座標系を張れることを前提としてきた。例えば平面の場合、 $\mathbf{e}_x = (1, 0), \mathbf{e}_y = (0, 1)$ のような自然な直交座標系をなす基底を選ぶことができる。このような基底を**標準基底**（あるいは**正規直交基底**）という。

【3-3】内積

【3-3-1】定義

ベクトル $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i, \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_j$ ($\mathbf{e}_i$ は標準基底) において¹⁷

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (3-3-1)$$

となるスカラー値をベクトルの（標準）**内積**という。（※なお本講ではベクトルの成分が実数である実ベクトルのみを取り扱う。）

自身との内積の値が $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0$ であり、0になるのは $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の時のみとなる事よりベクトルの**ノルム**（大きさ）を以下のように定義する。

¹⁷ (x,y)でなく(1,2)で表す。初見で分かりにくい場合は、nを2や3として総和を展開してみよう。

$$\|a\| \equiv \sqrt{a \cdot a} \quad (\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0) \quad (3-3-2)$$

また標準基底同士の内積は

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (3-3-3)$$

となる¹⁸。ここで δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ**と呼ばれる記号で以下のように定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (3-3-4)$$

これらより、ベクトル $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i, b = \sum_{j=1}^n b_j e_j$ の内積は

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j e_i \cdot e_j = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (3-3-5)$$

となり当然（標準）内積の定義と一致する。またベクトルと標準基底との内積は

$$e_i \cdot a = e_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j e_i \cdot e_j = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ij} = a_i \quad (3-3-6)$$

となるように、ベクトルにおけるその標準基底の成分を取り出す事に相当する。

[3-3-2] 代数的性質

定義から明らかに成り立つ、以下の基本的な代数的性質がある。

- (i) $a \cdot b = b \cdot a$
- (ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- (iii) $a \cdot (kb) = ka \cdot b$ (k はスカラー値) (3-3-7)
- (iv) $a \cdot a \geq 0$ (等号は $a = 0$ のときのみ)

(※(ii),(iii) の性質を合わせて**線形性**、また内積記号の左側でも成り立つことから**双線形性**という)

[3-3-3] 幾何学的意味

幾何ベクトルにおいては、以下のような幾何学的意味をもつ。

●内積 $a \cdot b$

図のように、なす角が θ のベクトル a, b において、 $a - b$ のノルムの2乗を考える。

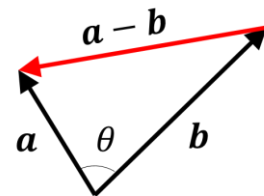
$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= (a - b) \cdot (a - b) \\ &= a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2a \cdot b \end{aligned}$$

一方、余弦定理より

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$$

両式より

$$a \cdot b = \|a\|\|b\|\cos\theta \quad (3-3-8)$$



この式より、 0 でないベクトル同士の内積が 0 となる場合、それらのベクトルは直交する事が分かる。

¹⁸ むしろ、これは標準基底あるいは正規直交基底が満たすべき性質となる

【第3講】ベクトル

●円の接線の方程式

図のような、点 O を中心とした半径 r_0 の円に点 P_0 で接する接線の方程式を考える。

この接線上の任意の点を P とし、それぞれの位置ベクトルを

$\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0, \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ とする。このとき題意より $\|\mathbf{r}_0\| = r_0$ である。

$\mathbf{r}_0$ はこの接線に対する法線ベクトルでもあり、

接線を表すベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ と直交するので

$$\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

が成り立つ。従って

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r} = r_0^2$$

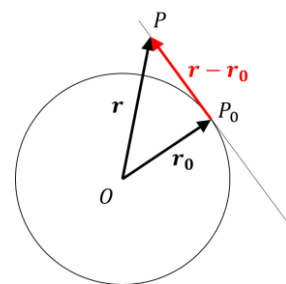
が求める式となる。

座標系を入れて座標値で表記すると、点 O を原点として

点 $P(x, y), P_0(x_0, y_0)$ とすると

$$x_0x + y_0y = r_0^2$$

となる。



(3-3-9)

●球面の接平面の方程式

また上記はそのまま球面に接する接平面の方程式に拡張される。

すなわち上記において、円→球面、接線→接平面に

読み替えれば、そのまま成立する事がわかる（確かめよう）。

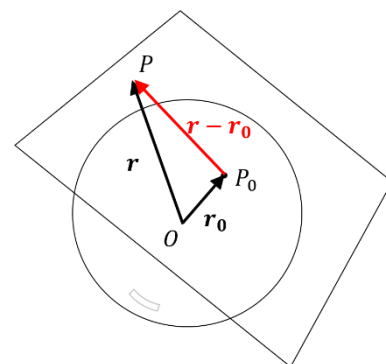
座標値では、点 $P(x, y), P_0(x_0, y_0) \rightarrow P(x, y, z), P_0(x_0, y_0, z_0)$

と読み替えることになり、

$$x_0x + y_0y + z_0z = r_0^2$$

となる。

点 O, P_0, P を含む平面で切断すると、円と接線の関係になる（部分空間）からこのような事ができるのだが、もう一つ重要なことはベクトルの式が座標系によらずに成り立つからである。



【3-4】抽象化されたベクトルの概念と例

これまで幾何ベクトルの性質を振り返ってきた。線形独立性や基底などのベクトルの組が持つ重要な性質は、(3-2-1)式にまとめられているような和とスカラー積の性質から導かれていることが分かる。逆に和とスカラー積が定義され、これらの性質を満たせば、線形独立性なども持つことになる。そこで (3-2-1)式の性質に、スカラー積の性質として

$$(vi) \quad (k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a} \quad (\text{分配則})$$

$$(vii) \quad k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a} \quad (\text{結合則})$$

$$(viii) \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\text{単位元})$$

を加え、これらを公理として位置づけ、この性質を満たす（かつ演算の結果が閉じる）和とスカラー

一積を定義できる対象をベクトルとみなすことで、ベクトルの概念が広げられる。ベクトルの集合のことを**ベクトル空間**といい、位置づけた公理を**ベクトル空間の公理**という。

また内積は、ベクトルの大きさやベクトル間の角度に関わる量であった。これも同様に内積の性質(3-3-7)式を公理とし、その性質を満たすような、上記のベクトル空間に自然に導入できる内積を定義して用いることとなる。内積が導入されたベクトル空間を**計量ベクトル空間**という。

拡張されたベクトル（ベクトル空間）の例をあげる。各公理を満たすことの確認は読者に任せる。

●例1 n 次元実数ベクトル空間： $\mathbb{R}^n$ （実数を n 個組にしたもの：行列でのベクトル）

ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, スカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\text{和 } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{スカラー積 } k\mathbf{a} = k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

と定義することでベクトル空間の公理を満たす。ベクトルの成分を縦に並べたものである。

$$\text{標準基底 } \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ も自然に定められる。

●例2 複素数の集合 $\mathbb{C}$

複素平面上で複素数の和はベクトルの和のような性質をもっていた。

ベクトル $\mathbf{a} = a_1 + ia_2, \mathbf{b} = b_1 + ib_2$, スカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\text{和 } \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + ia_2) + (b_1 + ib_2) \equiv (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)$$

$$\text{スカラー積 } k\mathbf{a} = k(a_1 + ia_2) \equiv ka_1 + i ka_2$$

と定義することでベクトル空間の公理を満たす。

基底 $\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = i$

$$\text{内積 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2}\{(a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) + (b_1 + ib_2)(a_1 - ia_2)\} = a_1b_1 + a_2b_2$$

と定める。

（注：本講では内積の値も実数としたいので、このように定義した。複素数値を許す場合は通常 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}$ と定義される。その場合、内積の性質も複素数に拡張される。）

●例3 [▼B] 1変数実数値関数の集合（少し高度な例）

和 $(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x)$, スカラー積 $(kf)(x) \equiv kf(x)$, 内積 $\int f(x)g(x)dx$

と定めることでベクトル空間の公理を満たし、自然な内積として利用できる。基底として三角関数を用いる例を、第6講行列 III にて応用例として取り上げる。

【3-5】外積

【3-5-1】定義¹⁹

ベクトルの外積は、3次元でのみ定義されるものであり、成分で表すと以下ようになる。

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ において ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は標準基底)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \quad (3-5-1)$$

となるベクトルをベクトルの**外積**という (規則性を見やすくするため添字は 1,2,3 とした)。

この定義を観察すると、成分と基底の積 $a_jb_ke_i$ の添字の組が $(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ の場合が正、 $(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)$ の場合が負 の符号がついていることが分かる。

この正負の組は、どの2つの数字をその () 内で入れ替えても互いに移り変わる。

また最初の項 $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1$ に対して、 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ とサイクリックに添字を入れ替えると第2項 $(a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2$ に、もう一度入れ替えると第3項 $(a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$ に、さらに入れ替えると第1項に戻る。従って、外積の定義全体がサイクリックな添字の入れ替えで不変 (入れ替えについて対称) となることが分かる。このような規則性を活かした成分表記に大変有用 (且つ強力) な記法 (**Levi-Civita (レヴィ = チヴィタ) 記号**) があるので付録1にて紹介する。

【3-5-2】代数的性質

定義より明らかに成り立つ、以下の基本的な代数的性質がある。

$$(i) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \therefore \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$(ii) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (3-5-2)$$

$$(iii) \quad (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (k \text{ はスカラー値})$$

また上記基本性質以外に、以下のような公式が成り立つ。ここでは公式の記載にとどめ、その証明は付録2に掲載する。各証明は成分表記で地道に行う方法と、Levi-Civita 記号を用いて劇的にシンプル(且つ機械的)に示す方法の2種類で行う。いずれも上記定義で述べた規則性に基づく。

●スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ で成り立つ公式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (3-5-3)$$

●ベクトル三重積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ で成り立つ公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (3-5-4)$$

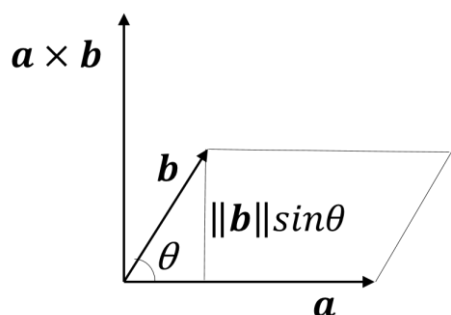
●外積同士の内積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ で成り立つ公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (3-5-5)$$

¹⁹ 初めて外積を学ぶ読者は幾何学的意味から入る方が分かりやすいと思う。[3-5-3] 参照。ただしこれを定義として成分表示 (3-5-1) を導くには (3-5-2)(ii) を幾何学的に示す必要があり初学者にはかえって難解かと思われる。

[3-5-3] 幾何学的意味

幾何ベクトルにおいては、以下のような幾何学的な意味を持つ。

●外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 

・大きさ：ベクトルとしての $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のノルムの2乗により、

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (\because (3-5-5)) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta \\ \therefore \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \end{aligned}$$

これは、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積と等しい。

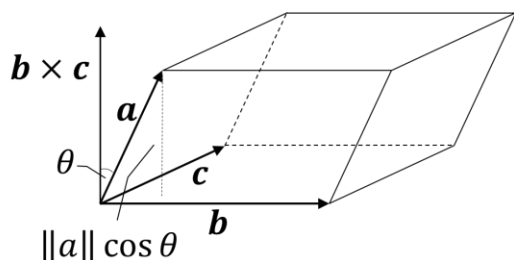
・方向： $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ に対して、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とそれぞれ内積をとると

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (\because (3-5-3))$$

より、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ どちらとも直交する。また定義より標準基底に対して

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

が成り立つ事より、図のように、 $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に向けて回した時に右ねじが進む方を向く。

●スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ との内積は、そのなす角を θ とすると $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \cos \theta$ であるが、 $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$ に $\|\mathbf{a}\| \cos \theta$ を掛けたものと見ることもでき、これはベクトル $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ が張る平行四辺形の面積に、ベクトル $\mathbf{a}$ の高さを掛けたものと等しい。従って、スカラー三重積の値は、3本のベクトルが張る平行六面体の符号付き体積と見なせる。

その符号はベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ との向き関係で決まり、図のようになす角 θ が $\pi/2$ 以下の場合に正となり、内積の符号を表す $\cos \theta$ の符号が反映されることになる。またスカラー3重積の性質(3-5-3)式はこの幾何学的意味から向き付けに注意して成り立つことが分かる。

ベクトルの外積は、第8講 回転の表現 II で学ぶクォータニオンの積から自然に生まれたもので、煎じ詰めるとその意味で3次元でしか定義できない²⁰。また n 次元に拡張可能な外積に似た概念のひとつに「外積代数」²¹と呼ばれるものがあるが、それに近いものを次節にて学ぶ。

²⁰ 生まれる詳細は第8講で。ちなみにクォータニオン（四元数）の次は8次元での八元数が定義でき、7次元空間では外積的なものは定義できるそう。

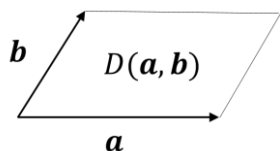
²¹ この節の外積（cross product）とは異なる「外積」であり、exterior product の訳語である。

【3-6】n本のベクトルが張るn次元体積

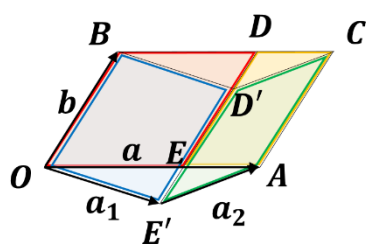
応用としてn次元空間でn本のベクトルが張るn次元の体積に相当する「関数」を考える²²。

外積の幾何学的意味の項で見たように、2次元の場合は外積の大きさ、3次元の場合はスカラー三重積にあたる量であり、これをn次元に拡張したい。

【3-6-1】2次元：2次元体積（面積）



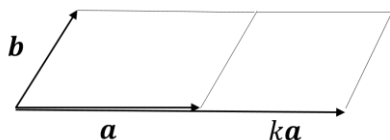
以下、図のようなベクトル a, b が張る面積を値にもつ、ベクトルを変数とする「関数」を $D(a, b)$ とし、その性質を考える。



(i) ベクトルの和に対して

$a = a_1 + a_2$ のとき図のように平行四辺形 $OE'D'B$ と $OEDB$ は底辺 OB が共通で高さが等しいので、面積も等しい（面積： $D(a_1, b)$ ）。
 $CD'E'A$ と $CDEA$ も同様（面積： $D(a_2, b)$ ）。従って

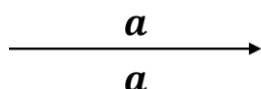
$$D(a_1 + a_2, b) = D(a_1, b) + D(a_2, b) \quad (b \text{ についても同様})$$



(ii) スカラー積に対して

a を k 倍すると面積も k 倍となる

$$D(ka, b) = kD(a, b) \quad (b \text{ についても同様})$$



(iii) 同じベクトルが張る面積は 0

$$D(a, a) = 0$$

またこれにより

$$0 = D(a + b, a + b) \quad (\because \text{(iii)})$$

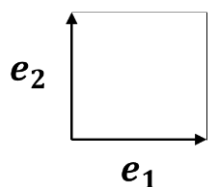
$$= D(a, a + b) + D(b, a + b) \quad (\because \text{(i)})$$

$$= D(a, a) + D(a, b) + D(b, a) + D(b, b) \quad (\because \text{(i)})$$

$$= D(a, b) + D(b, a) \quad (\because \text{(iii)})$$

$$\therefore D(b, a) = -D(a, b)$$

この面積は符号付きとなり、符号は張るベクトルの向き付けによる。



(iv) 標準基底が張る面積を 1 とする

$$D(e_1, e_2) = 1$$

面積の大きさの単位および向き付けの定義となる。

²² 次講以降の行列のダンジョンで戦うための武器を作る。今のうちに武器の経験値を上げておこう。

実はこの4つの性質：(i),(ii)は $\mathbf{b}$ についても同様

$$(i) \quad D(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = D(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + D(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) \quad (3-6-1)$$

$$(ii) \quad D(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = kD(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3-6-2)$$

$$(iii) \quad D(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad \therefore D(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3-6-3)$$

$$(iv) \quad D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \quad (3-6-4)$$

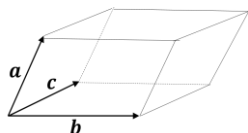
で、 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の値は一意に定まる。実際、 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ のとき

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= D(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= D(a_1\mathbf{e}_1, b_1\mathbf{e}_1) + D(a_1\mathbf{e}_1, b_2\mathbf{e}_2) + D(a_2\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1) + D(a_2\mathbf{e}_2, b_2\mathbf{e}_2) \quad (\because (i)) \\ &= a_1b_1D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_1b_2D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_2b_1D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_2b_2D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \quad (\because (ii)) \\ &= a_1b_2D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_2b_1D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \quad (\because (iii)) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad (\because (iii)) \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \quad (\because (iv)) \end{aligned}$$

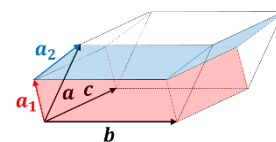
となるが、これは幾何学的に求まる符号付き面積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の値を成分で表したものと一致する。

($\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0), \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ のときの $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさとなる)

[3-6-2] 3次元：3次元体積（体積）



3次元に素直に拡張する。この体積を表す $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ も同様に以下の性質を持つ。(i)以外は明らか。(i)も $\mathbf{b}, \mathbf{c}$



が張る平行四辺形の面積に a_1, a_2 の高さを掛けた体積の和として成り立つ。）

$$(i) \quad D(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (3-6-5)$$

$$(ii) \quad D(k\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = kD(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (3-6-6)$$

$$(iii) \quad D(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \therefore D(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (3-6-7)$$

$$(iv) \quad D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1 \quad (3-6-8)$$

((i),(ii)は $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ についても同様。(iii)はどの2つが同じでも、どの2つを入れ替えてもという意味)

性質(iii),(iv)より、 $D(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ ($1 \leq i, j, k \leq 3$) は i, j, k の値が全て異なるとき非零の値をもち、変数部分が $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ からの並び替えで符号が変わるだけで以下のような値をもつことになる。

$$D(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{if } (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (3-6-9)$$

これは (3-7-1) 式である Levi-Civita 記号 ε_{ijk} と全く同じことがわかる。

また同じように上記4つの性質のみで $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ の値は一意に定まる。

実際 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{c} = \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k$ のとき

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= D\left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^3 c_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{i,j,k=1}^3 a_i b_j c_k D(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \\ &= a_1 \sum_{j,k=1}^3 b_j c_k D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + a_2 \sum_{j,k=1}^3 b_j c_k D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + a_3 \sum_{j,k=1}^3 b_j c_k D(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2)D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3)D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)D(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &= \{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\}D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (3-6-10) \end{aligned}$$

となり、これは幾何学的に求まる符号付き体積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ の値を成分で表したものと一致する。

[3-6-3] n 次元 : n 次元体積

n 次元に素直に拡張して

$$(i) \quad D(a_1, \dots, a_{i_1} + a_{i_2}, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_{i_1}, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, a_{i_2}, \dots, a_n) \quad (3-6-11)$$

$$(ii) \quad D(a_1, \dots, ka_i, \dots, a_n) = kD(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \quad (3-6-12)$$

$$(iii) \quad D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0 \\ \therefore D(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) = -D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \quad (3-6-13)$$

$$(iv) \quad D(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1 \quad (3-6-14)$$

これまでと同様にこの関数値はこの4つの性質で一意に定まり、「n 次元体積」に相当する²³。

3 次と同様 $D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ は 性質(iii),(iv)より $e_1, e_2, \dots, e_n$ からの並び替えで値が決まり²⁴、

$$D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \begin{cases} +1 & (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ が } (1, 2, \dots, n) \text{ の偶置換} \\ -1 & (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ が } (1, 2, \dots, n) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (3-6-15)$$

となり、これは (3-7-6) 式である拡張 Levi-Civita 記号 $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ と全く同じとなる。

性質 (i),(ii) のことを**多重線形性**、性質 (iii) のことを**交代性**という。

性質 (i), (ii), (iii) を用いて、後に重要となる性質を2つ導く。

●あるベクトルのスカラー積を他のベクトルに加えても「関数」の値は変わらない

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + ka_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \quad (3-6-16)$$

$$\begin{aligned} \text{【証明】} \quad D(a_1, \dots, a_i + ka_j, \dots, a_j, \dots, a_n) &= D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + kD(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ &= D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

●線形従属なベクトルの組に対しては0となる（張る体積は0）

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ が線形従属} \Rightarrow D(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (3-6-17)$$

【証明】線形従属なので、あるベクトルは他の線形結合で書ける。

例えば $a_1 = k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$ と書けたとすると（他の場合も同様）

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = k_2 D(a_2, a_2, \dots, a_n) + \dots + k_n D(a_n, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad \blacksquare$$

またこの対偶として「 $D(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0 \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$ は線形独立」が直ちにいえる。

この「関数」には線形代数がいっぱい詰まっている。次講以降で活躍する。

²³ 数学的な厳密さよりも武器を作ることを目的としている。そもそも「n 次元体積」の定義すらしていないことに注意。（これに踏み込むと話が進まないw 興味のある人は(将来)「Gram 行列式」「微分形式」とかで調べてみよう）次講で(n 次元目の高さ)×(n-1 次元体積)と解釈できる話をする。ここでは、これを用いて「n 次元体積」としよう。どうしても論理体系が気になる人は（内積のように）この4つの性質をこの「関数」の公理と位置づけて考え、別途「n 次元体積」となることを示す立場を取ろう。

²⁴ 偶置換、奇置換は、[3-7-2] 拡張 Levi-Civita 記号 および 付録3 参照

【3-7】付録1：Levi-Civita 記号²⁵

[3-7-1] Levi-Civita 記号（3次の場合）

●定義

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{if } (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (3-7-1)$$

この記号を使うとベクトルの外積は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i \quad (3-7-2)$$

または単に成分表記で

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (3-7-3)$$

と書ける。

実際(3-7-2)式を展開してみると

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{1jk} a_j b_k \mathbf{e}_1 + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{2jk} a_j b_k \mathbf{e}_2 + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{3jk} a_j b_k \mathbf{e}_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

となり、外積の定義（3-5-1）式と一致する。

●基本性質（各添字の値が 1, 2, 3 のどれであっても成り立つことを確かめるとわかりやすい）

- (i) $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ どの2つの添字を入れ替えても符号が変わる
 - (ii) $\varepsilon_{iij} = 0$ 添字が同じだと 0
 - (iii) $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$ 添字のサイクリックな入れ替えで不変
- (3-7-4)

●[▼C] Levi-Civita 記号の積

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (3-7-5)$$

概要を説明する。左辺を展開した第一項 $\varepsilon_{1jk} \varepsilon_{1lm}$ に着目すると、添字 j, k および l, m がそれぞれ 2, 3 か 3, 2 の場合に非零となり、その組み合わせが (2, 3)(2, 3), (3, 2)(3, 2) の場合に正、(2, 3)(3, 2), (3, 2)(2, 3) の場合に負の符号となる。すなわち 添字の組み合わせとして、 $j = l, k = m$ の場合に +1、 $j = m, k = l$ の場合に -1 となり、それ以外では 0 となる。

総和の他の項 $\varepsilon_{2jk} \varepsilon_{2lm}$, $\varepsilon_{3jk} \varepsilon_{3lm}$ についても同様の事が言えて、これらをまとめたものが上記の式となる。導出は行列式を学んだあと行列 II の講の付録で行う。

²⁵ エディントンのイプシロンとも呼ばれる（らしい）

[3-7-2] 拡張 Levi-Civita 記号 (n 次の場合)

●定義

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{が}(1, 2, \dots, n) \text{の偶置換} \\ -1 & (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{が}(1, 2, \dots, n) \text{の奇置換} \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (3-7-6)$$

●偶置換と奇置換

$(i_1, i_2, \dots, i_n)$ が $(1, 2, \dots, n)$ の順番を並び替えしたものとする。任意の2つの数字の入れ替えを**互換**という。 $(1, 2, \dots, n)$ から互換を繰り返し $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ の並びにすると、偶数回の互換で達成できる場合を**偶置換**、奇数回の場合を**奇置換**という。この偶奇性は互換のやり方によらない²⁶。

3次での例：1, 2, 3 の数字の並び方は $3! = 6$ 通りあり、 $(1, 2, 3)$ から互換を繰り返して行くと偶奇性により2種類に分かれる。 $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ ：偶置換 $(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)$ ：奇置換
(実際に確かめよう) 3次では通常の Levi-Civita 記号に帰着することがわかる。

●基本性質

- (i) $\varepsilon_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_n} = -\varepsilon_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_j, \dots, i_n}$ 添字の入れ替えで符号が変わる
(ii) $\varepsilon_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_j, \dots, i_j, \dots, i_n} = 0$ 同じ添字で0 (3-7-7)

[3-8] 付録2：外積の公式の証明

●成分表記による証明：ややこしそうに見えるが規則性がつかめれば見た目ほどではない²⁷。

○スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ で成り立つ公式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

3式をそれぞれ成分表記で展開する。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + b_2(c_3a_1 - c_1a_3) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

よって3式が等しいことが示された。■

²⁶ 付録3：置換と転倒数の偶奇性 参照のこと

²⁷ 証明そのものよりも、この規則性を掴むことを目的としている。パズル感覚で楽しんでほしい

○ベクトル三重積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ で成り立つ公式²⁸

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \{a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\}\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \{a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \{a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\}\mathbf{e}_3 \\ &= \{(a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1\}\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \{(a_1c_1 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_3b_3)c_2\}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \{(a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3\}\mathbf{e}_3 \\ &= \{(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1\}\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \{(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2\}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \{(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3\}\mathbf{e}_3 \\ &= \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1\}\mathbf{e}_1 + \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_2\}\mathbf{e}_2 + \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_3\}\mathbf{e}_3 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

○外積同士の内積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ で成り立つ公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ &= a_2b_3c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_1c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 + a_1b_2c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 \\ &\quad - (a_2b_3c_3d_2 + a_3b_2c_2d_3 + a_3b_1c_1d_3 + a_1b_3c_3d_1 + a_1b_2c_2d_1 + a_2b_1c_1d_2) \\ &= a_1c_1b_2d_2 + a_1c_1b_3d_3 + a_2c_2b_1d_1 + a_2c_2b_3d_3 + a_3c_3b_1d_1 + a_3c_3b_2d_2 \\ &\quad - (a_1d_1b_2c_2 + a_1d_1b_3c_3 + a_2d_2b_1c_1 + a_2d_2b_3c_3 + a_3d_3b_1c_1 + a_3d_3b_2c_2) \\ &= \{a_1c_1(b_2d_2 + b_3d_3) + a_2c_2(b_1d_1 + b_3d_3) + a_3c_3(b_1d_1 + b_2d_2)\} \\ &\quad - \{a_1d_1(b_2c_2 + b_3c_3) + a_2d_2(b_1c_1 + b_3c_3) + a_3d_3(b_1c_1 + b_2c_2)\} \end{aligned}$$

$$\text{この式に } 0 = (a_1c_1b_1d_1 + a_2c_2b_2d_2 + a_3c_3b_3d_3) - (a_1d_1b_1c_1 + a_2d_2b_2c_2 + a_3d_3b_3c_3)$$

を加える

$$\begin{aligned} &= [\{a_1c_1(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) + a_2c_2(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) + a_3c_3(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\} \\ &\quad - \{a_1d_1(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + a_2d_2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + a_3d_3(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\}] \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

²⁸ 基底 $\mathbf{e}_1$ の成分のみに着目、残りはサイクリックな添字の入れ替えで成り立つ

【第3講】ベクトル

●Levi-Civita 記号を用いた証明²⁹ (各総和記号の添字は全て 1 から 3 まで動く)

○スカラー三重積 : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_i a_i \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \sum_j b_j \sum_{k,i} \varepsilon_{jki} c_k a_i = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{jki} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (\because (3-7-4)(iii)) \\ \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \sum_k c_k \sum_{i,j} \varepsilon_{kij} a_i b_j = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{kij} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad \blacksquare\end{aligned}$$

○[▼C] ベクトル三重積 : $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_j \left(\sum_{l,m} \varepsilon_{klm} b_l c_m \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i,j,l,m} \sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \mathbf{e}_i \quad (\because (3-7-4)(iii)) \\ &= \sum_{i,j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \mathbf{e}_i \quad (\because (3-7-5)) \\ &= \sum_{i,j} \{ (a_j c_j) b_i - (a_j b_j) c_i \} \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

○[▼C] 外積同士の内積 : $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \sum_i \left(\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \right) \left(\sum_{l,m} \varepsilon_{ilm} c_l d_m \right) \\ &= \sum_{j,k,l,m} \sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m \\ &= \sum_{j,k,l,m} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \quad (\because (3-7-5)) \\ &= \sum_{j,k} (a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

²⁹ こういうのが代数の威力の片鱗の片鱗でござる。総和記号に不慣れな場合は、第2講の付録2参照。

【3-9】付録3：置換と転倒数の偶奇性

置換の偶奇性（偶数・奇数のどちらかということ）はその本来の形で定義し、互換のやり方によらないことを証明しようとする、 n 次の対称群の話となり準備含めそれなりの頁数を要する。大抵の線形代数の教科書にも書いてあると思うので、ここでは転倒数というものの偶奇性と置換の偶奇性の関係を調べる。なお対称群とはどういうものなのか一見の価値はあると思うので、未見の読者は折をみて調べて頂きたい³⁰。

●転倒数の定義

1 から n までの数字の並び $1, 2, \dots, n$ を任意に並び替えしものを $i_1, i_2, \dots, i_n$ としたとき、このなかの i_j, i_k が、 $j < k$ にもかかわらず $i_j > i_k$ となるとき、この i_j, i_k は転倒しているといい、全ての転倒している2つの数字の組数の合計をその数字の並びの**転倒数**という。

→要するに左から順にみていったとき、自分の右側に自分より小さな数がいくつあるか？

その合計のこと。任意の数字の並びに対してその転倒数は一意に定まり、並び替えの手順には依らないことがわかる。

例) $1, 2, 3$: 転倒している数はない → 転倒数 0 $1, 3, 2$: 3 と 2 が転倒 → 転倒数 1
 $2, 3, 1$: 2 と 1, 3 と 1 が転倒 → 転倒数 2 $2, 1, 3$: 2 と 1 が転倒 → 転倒数 1
 $3, 1, 2$: 3 と 1, 3 と 2 が転倒 → 転倒数 2 $3, 2, 1$: 3 と 2, 3 と 1, 2 と 1 が転倒 → 転倒数 3

●転倒数の符号の定義

$i_1, i_2, \dots, i_n$ の転倒数が偶数のときを $+1$ 、奇数のときを -1 として転倒数の符号を定義し、 $\varepsilon(i_1, i_2, \dots, i_n)$ と記す。

例) $\varepsilon(1, 2, 3) = \varepsilon(2, 3, 1) = \varepsilon(3, 1, 2) = +1$, $\varepsilon(1, 3, 2) = \varepsilon(2, 1, 3) = \varepsilon(3, 2, 1) = -1$

●隣り合う2つの数字の入れ替え（隣接互換）に対する性質

$i_1, i_2, \dots, i_n$ に対し、どの隣り合う2つの数字を入れ替えても転倒数の符号は変わる。

(つまり $\varepsilon(i_1, \dots, i_{k+1}, i_k, \dots, i_n) = -\varepsilon(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n)$ となる)

【証明】：任意の隣り合う数字を i_k, i_{k+1} とする。この2つの数字を入れ替えるとき、2つ以外の他の数字に対する転倒数は変わらないことがわかる。この2つの数字の組が $i_k < i_{k+1}$ ならば入れ替えると転倒数は1増える。逆に $i_k > i_{k+1}$ ならば入れ替えると転倒数は1減る。以上によりいずれにしても転倒数の符号は変わることがわかる。 ■

³⁰ ごく始めの部分について次講の付録2で触れる

【第3講】ベクトル

●任意の2つの数字の入れ替え（互換）に対する性質

$i_1, i_2, \dots, i_n$ に対し、どの2つの数字を入れ替えても転倒数の符号は変わる。

(つまり $\varepsilon(i_1, \dots, i_{j+k}, \dots, i_j, \dots, i_n) = -\varepsilon(i_1, \dots, i_j, \dots, i_{j+k}, \dots, i_n)$ となる)

【証明】：入れ替える数字の組を i_j, i_{j+k} ($k > 0$) とする。今 i_j を次々と右隣の数字と入れ替えて $\dots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \dots, i_{j+k-1}, i_{j+k}, i_{j+k+1}, \dots \leftarrow$ から(☆)の並びにすると k 回隣接互換したことになる。
 $\dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{j+k-1}, i_{j+k}, i_j, i_{j+k+1}, \dots$ (☆) さらに i_{j+k} を次々と左隣と入れ替えて(★)の並び
 $\dots, i_{j-1}, i_{j+k}, i_{j+1}, \dots, i_{j+k-1}, i_j, i_{j+k+1}, \dots$ (★) まで行つたとすると $k-1$ 回隣接互換したことになる。
 これにより i_j, i_{j+k} の互換が達成され、合計で $2k-1$ 回の奇数回 隣接互換したので転倒数の符号は変わる。また転倒数は一意に定まるので互換のやり方には依らないことがわかる。 ■

●置換の偶奇性と転倒数の偶奇性

$i_1, i_2, \dots, i_n$ が $1, 2, \dots, n$ の偶/奇置換であるとは、 $1, 2, \dots, n$ に対して互換を繰り返し偶/奇数回で $i_1, i_2, \dots, i_n$ に到達できる場合のことと定義した。今、この過程を転倒数と比較しながらたどれば、転倒数の定義より $1, 2, \dots, n$ の転倒数は偶数(0)で、上記互換に対する性質より互換のたびに転倒数の偶奇性も同じように変わっていくことから、任意の $i_1, i_2, \dots, i_n$ に対する置換の偶奇性と転倒数の偶奇性は一致することがわかる。さらに $i_1, i_2, \dots, i_n$ に対する転倒数は一意に定まるので、置換および転倒数の偶奇性は互換のやり方に依らないことがわかる。

● $D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ および $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ の符号について

「関数」 $D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ は $i_1, \dots, i_n$ が全て異なるときに0以外の値をもち、 $1, \dots, n$ のときに+1となり、どの e_i, e_j を入れ替えても符号が変わる性質を持っていた。上記の偶奇性の議論を当てはめると、 $i_1, \dots, i_n$ が全て異なるとき置換および転倒数の偶奇性による符号の変化と一致することがわかる。また $D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ と拡張 Levi-Civita 記号 $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ を同一視できることになる。

●演習：4次の置換・転倒数の偶奇性の具体例による確認

下記は4つの数字の並び $4!=24$ 個を置換・転倒数の符号により組分けしたものであり、()内はそれぞれの転倒数を示す。これを用いた本付録内容の確認を、理解を深めるための演習とする。

$$\begin{aligned} +1: & \begin{cases} 1234 (0) & 1342 (2) & 1423 (2) & 2143 (2) & 2314 (2) & 2431 (4) \\ 3124 (2) & 3241 (4) & 3412 (4) & 4132 (4) & 4213 (4) & 4321 (6) \end{cases} \\ -1: & \begin{cases} 1243 (1) & 1324 (1) & 1432 (3) & 2134 (1) & 2341 (3) & 2413 (3) \\ 3142 (3) & 3214 (3) & 3421 (5) & 4123 (3) & 4231 (5) & 4312 (5) \end{cases} \end{aligned}$$

なお、先頭が1である $1234(0)$, $1342(2)$, $1423(2)$ と $1243(1)$, $1324(1)$, $1432(3)$ の各転倒数とその偶奇性は1を除いた $234(0)$, $342(2)$, $423(2)$ と $243(1)$, $324(1)$, $432(3)$ のと同じで、さらに各数字から1を引いた $123(0)$, $231(2)$, $312(2)$ と $132(1)$, $213(1)$, $321(3)$ の各転倒数とその偶奇性とも等しい。次講にて、このことを用いる。

【第4講】行列Ⅰ：連立一次方程式

【4-1】はじめに

本講ではまず連立一次方程式を加減法（消去法）で解くことから始めて、掃き出し法（ガウスの消去法）と呼ばれる系統的な解法を学ぶ。実は線形代数は連立一次方程式を系統的に解く研究に端を発するものであり、そこには線形代数の本質の一端が潜んでいる。本講では、ひたすら連立一次方程式をいじくり回し、前講の最後に用意した「関数」も使い、行列式・行列を定義して考察を続ける。

ちなみに連立一次方程式を効率的に解くことは、現代においても計算科学における重要な研究テーマのひとつであると聞いたら驚く人もいるかと思う。もちろん2元や3元連立といったことではなく、とてつもなく大規模な話である³¹。そこで使われる手法はさまざまであるが、掃き出し法はその最初の第一歩にあたる。

【4-2】掃き出し法

【4-2-1】連立一次方程式の加減法による解法

以下の三元連立一次方程式を加減法で解く。

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ x + 2y + 4z = 17 \end{cases}$$

毎回 x や y, z を書く必要ないよね？

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{array} \right]$$

・第2式と第3式から第1式のそれぞれ2倍・1倍を引く

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ -y - z = -5 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

・第2式を(-1)倍

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y + z = 5 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

・第3式から第2式を引く

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

・第1式と第2式から第3式のそれぞれ2倍・1倍を引く

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

・第1式から第2式を引く

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

³¹ 何千萬元連立とか。凄っ：偏微分方程式を離散化したものや、「ビッグデータ」の解析手法 等々々々

【第4講】行列Ⅰ：連立一次方程式

左側は加減法を用いて実際に解いたもので、右側はその係数と右辺の定数項のみを書き出したものである。右側はひとまず置いて、加減法の解き方を振り返ってみよう。

連立方程式なので、各式を辺々「加減」しても成り立たなければならない。加減法はこの性質を利用して、各式ごとに担当する変数以外の変数を消去していき、最終的に各式の左辺が単独な各変数となるようにすることで、右辺に解を得る手法である。上記を実現するにあたり、

- ・ある式の両辺を定数倍（0以外で負値を含む）する
- ・ある式の両辺の定数倍（0以外で負値を含む）を別の式の両辺に加える

の2つの式変形が基本となり、これらを駆使しながら解くことになる。

上記の例をみると、必要な情報は左辺の各式における各変数の係数と、右辺の定数項だということが分かる。その観点で各係数と定数項のみを抽出して書かれたものが右側の表記となり、掃き出し法とは右側の表記で加減法をやることに他ならない。

[4-2-2] 掃き出し法と行基本変形

右側の表記 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{array}\right)$ は、元の式の係数が書かれている縦棒の左側部分を**係数行列**、右辺

定数項にあたる縦棒の右側を含めた全体を**拡大係数行列**という。横に並んだ数字・文字を**行**、縦に並んだ数字・文字を**列**と呼ぶ。この例では係数行列のみで見れば第1行は 1 1 2、第3列は 2 3 となる。また係数行列の各行で左からみて最初の0でない値をもつ成分を**主成分**という。

掃き出し法では「式変形」にあたるものは**行基本変形**と呼ばれ、行基本変形を駆使して実現すべき係数行列を**簡約行列**といい、この行、列、主成分の用語を使うと以下のように定義される。

●行基本変形の定義

- ・ある行を定数倍（0以外で負値を含む）する
- ・ある行の定数倍（0以外で負値を含む）を別の行に加える (4-2-1)
- ・（必要に応じて）ある行と別の行を入れ替える

●簡約行列の定義（各主成分は各式に残す各変数の係数にあたる）

- ・各主成分の値は1
- ・主成分をもつ列の主成分以外の値は0 (4-2-2)
- ・各行は下側にいくほど主成分は右側にある
- ・全ての成分が0となる行はそうでない行の下側にある

違う例で掃き出し法を確認してみよう。右側と見比べると何をしているのかよく分かると思う。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ -x + y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + 4z = 8 \end{cases}$$

下記の $r_3 - 2r_1$, $r_2 \leftrightarrow r_3$ 等は、それぞれ「3行目 (r_3) から1行目 (r_1) の2倍を引いた」

「2行目 (r_2) と3行目 (r_3) を入れ替えた」という行基本変形を意味する³²。

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ z = 3 \\ -y - 2z = -8 \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] r_2 \leftrightarrow r_3 \qquad \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ -y - 2z = -8 \\ z = 3 \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] r_2 \times (-1) \qquad \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ y + 2z = 8 \\ z = 3 \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - 3r_3 \\ r_2 - 2r_3 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] r_1 + r_2 \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

[4-2-3] 不定解、解なしとなる場合

連立一次方程式において方程式が全て独立でない場合、その解は不定もしくは不能（解なし）となった。例として

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 1 + a \end{cases}$$

を考える。この連立方程式の第3式は、第2式から第1式を引いたものの右辺定数項に a を足したものとなっており、独立な式が一つ減るので $a = 0$ の場合 解は不定となる。

$a \neq 0$ の場合は連立させる式が共通の解を持たない事になり連立方程式としては解なし、つまり不能となる。掃き出し法ではどのように振る舞うのだろうか。実際に解いてみよう。

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1+a \end{array} \right] \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 1 + a \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1+a \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -y - 3z = -1 \\ -y - 3z = -1 + a \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1+a \end{array} \right] r_2 \times (-1) \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ -y - 3z = -1 + a \end{cases} \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right] r_3 + r_2 \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 0 = a \end{cases}
 \end{array}$$

となり、3行目が元の式で表すと左辺は0、右辺は a となった。さらに続けると

³² r は 行を表す row の意。この書き方はいろいろと流儀があると思う。なお「このように各列の主成分以外の値を0にしていけることを『掃き出す』と称している」という説が有力。

【第4講】行列Ⅰ：連立一次方程式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right] r_1 - r_2 \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ 0 = a \end{cases}$$

と簡約行列となり、確かに3変数に対して独立な式が2つであることを意味している。

$a \neq 0$ の場合、**不能**（連立方程式としては解無し）となる。

$a = 0$ の場合、解は**不定**となりパラメータ t を用いて例えば $z = t$ とした場合は

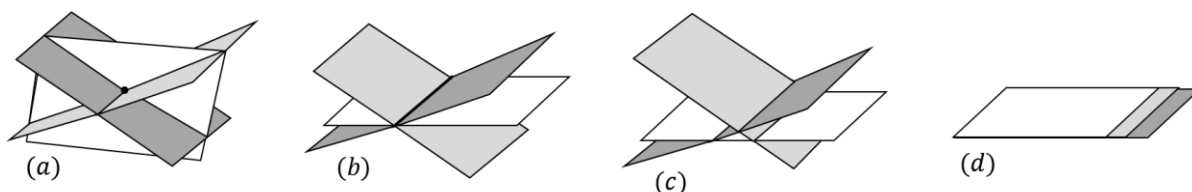
$$\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{あるいはパラメータを消去して} \quad \begin{cases} x = z \\ y = -3z + 1 \end{cases}$$

という解となる。このようなパラメータの数（この場合は1）は**解の自由度**と呼ばれる。

以上のように簡約行列となった時点での「主成分の数」（＝「主成分がある行/列の数」＝「成分が全て0となった行以外の行の数」）を（係数行列の）**rank（階数）**といい上記の例では2となる。これは元の連立方程式で独立な式の数意味することになる。元の変数の数（ n ）に対して同じだけ独立な式の数（rank）があれば解が定まり（一意性は後程述べる）、少なければ不能か不定となり、不定の場合は 解の自由度 = $n - \text{rank}$ という関係となる（付録2参照）。

また行基本変形の様子を観察すると直接数値を加減しあうのは同じ列の間だけであり、rank は係数行列部分のみで決まり定数項の値に依らず同じ手順で掃き出せる構造であることがわかる。

※幾何学的解釈：3元1次方程式 $ax + by + cz = d$ は3次元空間における平面の方程式とみることもできた。平面の法線ベクトルを $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 、平面上のある点を $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 、平面上の任意の点を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると、平面の方程式は $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ であり、これは $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ となり右辺を d として与式を得る。式より右辺の定数項が変わると、平面は法線ベクトルの方向（逆向きも含む）に平行移動することがわかる(付録3参照)。



上図は3元連立1次方程式を3平面の交わりとして幾何学的に解釈したもので、図の (a) は3平面が一点で交わり、連立方程式の解が定まる場合に相当する。(b) は1直線で交わり、上記の例の連立方程式が自由度1の不定解を持つ場合に相当する。(c) は3平面が共通部分を持たず不能となる例であり上記の例の連立方程式で定数項 $a \neq 0$ に相当する。(d) は独立な式が1つ（rank=1）で解の自由度が2に相当する。このように係数行列の行を（法線）ベクトルとみなした場合、それらの線形独立性が連立方程式の独立性を決めていることが読み取れる。（各面の法線ベクトルを考察せよ。ヒント：2平面が平行な場合は法線も平行、直線で交わる場合両法線は直線に垂直となる。）次項ではこれとは違う見かたで連立一次方程式を考察する。

[4-2-4] 連立一次方程式の違う見かた

簡単のために2元連立一次方程式で考えよう。以下の連立方程式をこんな風にみてみよう。

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \quad x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (4-2-3)$$

連立方程式の解は $x = 1, y = 2$ となり、2式は独立な式であることもわかる。

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ は、成分がそれぞれ $(1,2), (2,5), (5,12)$ の数ベクトルであり、それぞれ変数 x, y の係数と右辺定数項に相当する。変数 x, y を係数のベクトルに対するスカラー積とみれば、

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \div \quad \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

となり元の連立方程式を再現し、(4-2-3)式は係数列のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ の線形結合で定数項ベクトルを表せるか?を意味し、解が定まるこの場合はベクトルの組は線形独立である。

別の例として独立でない連立方程式も考えてみよう。

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} \quad x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (4-2-4)$$

下式は上式の3倍で、答えは $x = -2t + 5, y = t$ となり、独立ではない式であることがわかる。

また係数の列のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ となり線形従属であり、実際ベクトルを一つにまとめることができ、方程式は $(x + 2y) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ となり確かに不定解を得ることがわかる。

この見かたでは、一般的な2元連立一次方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{は} \quad x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (4-2-5)$$

とみることになる。ここでベクトルの講の最後で準備した「関数」 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を登場させよう。

天下り式で恐縮だが、 $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} (= x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix})$ と $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に代入してみると線形性と交代性より

$$D\left(\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = D\left(x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = xD\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) + yD\left(\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = xD\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$$

同様に

$$D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = xD\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right) + yD\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = yD\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$$

これは、 $D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \neq 0$ の場合

$$x = D\left(\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) / D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right), \quad y = D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}\right) / D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \quad (4-2-6)$$

として解が求まるということを意味している。成分で表すと $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ だった。

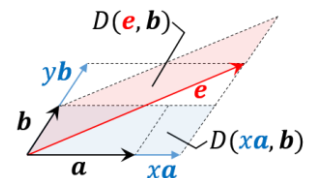
(4-2-3)式 $x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ の例では、 $D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 5 - 2 \times 2 = 1$ であり、0でない。

また $D\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = 5 \times 5 - 12 \times 2 = 1$, $D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 12 - 2 \times 5 = 2$ なので、確かに

$x = 1, y = 2$ を得る。また(4-2-4)式の例だと列のベクトルは線形従属なので $D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = 0$ となり、解が不定となる場合この方法では解を得られないことになる。

※幾何学的解釈： $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{a}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{e}$ により式は $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{e}$ と書け $\mathbf{e}$ と $\mathbf{b}$ が張る面積 $D(\mathbf{e}, \mathbf{b})$ は $x\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が張る面積 $D(x\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と等しく、これは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が張る面積 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の x 倍であり、よつ

て $D(\mathbf{e}, \mathbf{b}) = D(x\mathbf{a}, \mathbf{b}) = xD(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ より $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ のとき $x = D(\mathbf{e}, \mathbf{b}) / D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ として求まる。



【第4講】行列Ⅰ：連立一次方程式

同様に3元連立一次方程式でも各係数の列と定数項をベクトルとみなし

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases} \quad \text{だと} \quad x \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} \quad (4-2-7)$$

において $D\left(\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right) = xD\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right)$ 等がいて、 $D\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right) \neq 0$ の場合は

$$x = \frac{D\left(\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right)}{D\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right)}, \quad y = \frac{D\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right)}{D\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right)}, \quad z = \frac{D\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}\right)}{D\left(\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}\right)} \quad (4-2-8)$$

として解ける。全く同様にして、 n 元連立でもこの「関数」を適用して解くことができる。このような連立一次方程式の解法を**クラメルの法則**（公式）という³³。本項の見かた「 n 元連立一次方程式の各変数を $x_1, \dots, x_n$ 係数行列の各列と右辺定数項をベクトルとみなしたものを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ とすると方程式は $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ と書ける。」に対して、いくつか考察しよう。

○掃き出し法とは $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ に対し線形結合の係数の組 $x_1, \dots, x_n$ を不変に保ったまま（線形結合関係を保つという）、行基本変形により $x_1\mathbf{a}'_1 + \dots + x_n\mathbf{a}'_n = \mathbf{b}'$ のように各ベクトルを変形していき、最終的に $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ を標準基底に変形することで $x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{x}$ として解 $\mathbf{x}$ を得る手法といえる。つまり行基本変形は線形結合関係を保つ³⁴（だから解になる）。

○この見かたでは簡約行列の rank は線形独立な列のベクトルの最大数と同じとみなせる。実際前項の例では $\text{rank} = 2$ だが主成分がないため掃き出せなかった3列目は主成分のある2列のベクトルの線形結合で表され、簡約行列の構造から一般的に成り立つことがわかる（付録2参照）。また上記のように線形結合関係は行基本変形で保たれるので、rank を（係数）行列の線形独立な列のベクトルの最大数と定義し直すことで簡約行列でない任意の（係数）行列に拡張できることになる。

○前講(3-6-17)の対偶「 $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形独立」および「 n 次元のベクトル($\mathbf{b}$)の線形独立な n 本のベクトル $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ による線形結合での表し方は一意³⁵」より、クラメルの法則により得る解は一意な解であることがいえる。また n 本の列のベクトルの組が線形独立な場合、上記より rank は n となりその際の掃き出し法で定まるの解の一意性もいえる。

前項の幾何学的解釈でみた行をベクトルの組とみなしたときの線形独立性と解の一意性、および $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \neq 0$ との関係は次講にてまとめて示す。

$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \neq 0$ は連立一次方程式が一意な解を持つことを示す。次節で改めて調べよう。

³³ 掃き出し法に比べ計算量が多いため、数値計算には向かず理論的考察等に用いられる。次講にて再登場する。なおクラメルの法則(公式)は通常 行列式を用いて定式化されているものを指す。念のため。

³⁴ 「だから解になる」ので成立して当然なのだが、付録3：●行基本変形と線形結合関係 にて示す

³⁵ 第3講第2節(3-2-5) 参照

【4-3】行列式の導入

【4-3-1】あらためて「関数」 $D(a, b, c)$ とは

【3-6】節でみた4つの性質で、その値が一意に定まった。3次の場合を以下に再掲する。

$$\begin{cases} \text{(i)} & D(a_1 + a_2, b, c) = D(a_1, b, c) + D(a_2, b, c) & (3-6-5) \\ \text{(ii)} & D(ka, b, c) = kD(a, b, c) & (3-6-6) \\ \text{(iii)} & D(a, a, b) = 0 \quad \therefore D(b, a, c) = -D(a, b, c) & (3-6-7) \\ \text{(iv)} & D(e_1, e_2, e_3) = 1 & (3-6-8) \end{cases}$$

今、相手にしているのは連立一次方程式で、その係数行列を列のベクトルの組として見ているのだった。これからこの「関数」を成分表記で調べるが、係数行列を列のベクトルの組として見ることを踏まえて $a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ として成分を定義する。成分 a_{ij} の左側の添字 i は各ベクトルの上から数えて何番目の成分か（つまり何行目か）を、右側の添字 j は横に並んだ列のベクトルの組のうち左から数えて何番目か（つまり何列目か）を表している。行はその成分が横に並び、列はその成分が縦に並ぶことを思い出そう。また3行3列だと

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1\text{行} \\ \leftarrow 2\text{行} \\ \leftarrow 3\text{行} \\ \uparrow 1\text{列} \uparrow 2\text{列} \uparrow 3\text{列} \end{matrix}$$

図のようになることに注意しよう。つまり添字は $a_{\text{行列}}$ を指す。

感覚を掴むために、まずは3次からやると

$$D(a_1, a_2, a_3) = D\left(\sum_{i=1}^3 a_{i1} e_i, \sum_{j=1}^3 a_{j2} e_j, \sum_{k=1}^3 a_{k3} e_k\right) = \sum_{i,j,k=1}^3 a_{i1} a_{j2} a_{k3} D(e_i, e_j, e_k) \quad (4-3-1)$$

(4-3-1)式の右辺をじっくり観察してみよう。係数行列の成分は $a_{i1} a_{j2} a_{k3}$ のように各ベクトルからの積として現れ、右側の添字はベクトルの番号すなわち列の番号を示し、1, 2, 3 と固定されている。左側の添字 i, j, k は各ベクトルの成分の番号を表し、それぞれ独立に 1, 2, 3 をとるが $D(e_i, e_j, e_k)$ により i, j, k の値が全て異なる場合のみ残る。つまり各列から一つずつ、他のどの行とも重ならないように成分を選ぶことになる。符号は $D(e_i, e_j, e_k)$ により決まり、 $(i, j, k) \equiv (1, 2, 3)$ の時+1で、どの2つの添字を入れ替えても符号が変わる。という構造をしている。

3次の場合、 $D(e_i, e_j, e_k)$ は Levi-Civita 記号 ε_{ijk} と同一視できた。

この構造は n 次の場合も同様となる。

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \quad (4-3-2)$$

係数行列の成分は $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$ のように列を表す右側の添字は 1, 2, $\dots$, n 固定、各成分を表す左側の添字 $i_1, i_2, \dots, i_n$ は $D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ により 添字の値が全て異なる場合のみ残る。つまり各列から一つずつ、他のどの行とも重ならないように成分を選ぶことになる。符号は $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (1, 2, \dots, n)$ の時+1で、どの2つの添字を入れ替えても符号が変わる。

n 次の場合も $D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ は 拡張 Levi-Civita 記号 $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ と同一視できた。

[4-3-2] 行列式の定義

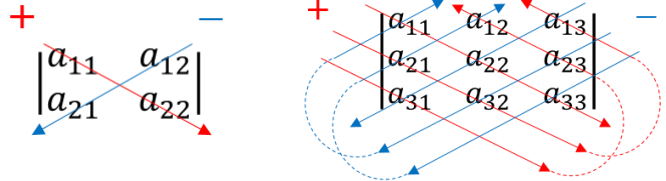
前節で連立一次方程式の係数を列のベクトルの組とみたときの「関数」 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots) \neq 0$ が一意な解をもつ条件であることをみた。この指標を**行列式**という³⁶。この後4節で定義する行列に対しても、固有な特徴を示す重要な指標となる。ここで改めて定義しよう。表記としては(係数)行列の成分をそのまま並べ、大括弧 $[]$ でなく、縦棒 $|$ で挟んだ形で表す。 $D(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \dots)$ の表記は書くのがメンドクサイので、Levi-Civita 記号 $\varepsilon_{ijk\dots}$ で代用しよう³⁷。

2 次だと以下のように定義される

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} a_{i1} a_{j2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (4-3-3)$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv \begin{cases} +1 & \text{if } (i,j) = (1,2) \\ -1 & \text{if } (i,j) = (2,1) \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (4-3-4)$$

簡単な覚え方としてよく使われるのは
図の左側で、左上から右下へ掛ける場合は+の、右上から左下へ掛ける場合は-の符号がつく。



3 次だと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \quad (4-3-5)$$

$$\begin{aligned} \text{展開すると} \quad &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

簡単な覚え方としてよく使われるのは、上図の右側で、サラスの方法とも呼ばれる。

いずれも各列から一つずつ、他のどの行とも重ならないように成分を選んでいる事に再度注意。

n 次の場合以下のように定義される。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \quad (4-3-6)$$

4 次以上では、サラスの方法のような簡易的な覚え方は適用できない³⁸。また n 次の行列式は展開すると $i_1, \dots, i_n$ の順列の個数すなわち $n!$ 個の項数となり、計算量も膨大となっていく。なにかしら計算量を減らす方法が望まれる。次項にて行列式の性質をさらに深掘りしよう。

³⁶ 歴史的にはこのように連立一次方程式の可解性を判定する指標として導入された。

³⁷ 一般的な行列式の定義である、ライプニッツの明示公式と同等であり、付録4にて言及する

³⁸ なぜか？ 4 次を例に同じような図を書いてみて理由を考えてみよう

[4-3-3] 行列式の性質Ⅰ

以下にまとめて列挙するが【3-6】節でみた「関数」 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots)$ の（列の）ベクトルに関する性質はそのまま引き継ぐ。3 次の場合を具体例として示す。高次も同様となる。

- (i) 各列のベクトルの多重線形性：ベクトルの和

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad (4-3-7)$$

- (ii) 各列のベクトルの多重線形性：スカラー積

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (4-3-8)$$

- (iii) 列のベクトル間の交代性

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (4-3-9)$$

- (iv) 標準基底を順に列のベクトルにもつ行列式の値は 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (4-3-10)$$

- (v) ある列のスカラー倍を別の列に加えても行列式の値は変わらない

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + kc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (4-3-11)$$

- (vi) 列のベクトルの組が線形従属 $\Rightarrow$ 行列式の値は 0 (4-3-12)

（対偶：行列式の値が 0 でない $\Rightarrow$ 列のベクトルの組は線形独立）

(vi') 列のベクトルの組は線形独立である $\Leftrightarrow$ 行列式の値は 0 でない （次講第 3 節で示す）

これ以外のとても重要な性質として、行列式は行と列が完全に対等であることを示すことができ、上記を含め列に対して成立する性質がそのまま行に対しても成立する事がわかる。付録 1 に記載する。またこれを用いると、具体的には 3 次の場合だと

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

のように行と列を入れ替えた（つまり $a_{ij} \leftrightarrow a_{ji}$ となる）（係数）行列を転置行列というが、転置してもその行列式は変化しない（値は等しい）事が示せる。証明を同様に付録 1 に記載する。

- (vii) 転置行列の行列式は元の行列の行列式と等しい (4-3-13)

さらに上記の性質は行に対しても成り立つため、掃き出し法での行基本変形を当てはめて考えると

- (viii) 行基本変形に対する性質 (4-3-14)

- A) ある行の定数倍を別の行に加えても、行列式の値は変わらない（性質(v)より）
- B) ある行を（0 以外で）定数倍すると、行列式の値も定数倍される（性質(ii)より）
- C) ある行と別の行を入れ替えると、行列式の符号が変わる（性質(iii)より）

【第4講】行列 I：連立一次方程式

行基本変形を適用して、以下のように行列式の1列目を1行目以外0にできたでしょう。4次を例として考えてみる。 $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$ に注意し行列式の定義より添字 i で展開すると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k,l=1}^4 \varepsilon_{ijkl} a_{i1} a_{j2} a_{k3} a_{l4} = \sum_{j,k,l=1}^4 \varepsilon_{1jkl} a_{11} a_{j2} a_{k3} a_{l4} = a_{11} \sum_{j,k,l=1}^4 \varepsilon_{1jkl} a_{j2} a_{k3} a_{l4}$$

と i が1以外の項は残らない。最右辺は ε_{1jkl} と最初の添字が1に確定し、 j, k, l が1になる項も残らなくなり a_{11} 以外の1列目だけでなく1行目も除いた成分だけが残ることになる。また置換 $(1,2,3,4) \rightarrow (1,j,k,l)$ の偶奇性は先頭の1が不動なので置換 $(2,3,4) \rightarrow (j,k,l)$ の偶奇性と等しく、これは各数字を -1 した（各数字の名前をつけ直した）置換 $(1,2,3) \rightarrow (j-1, k-1, l-1)$ の偶奇性とも等しい（前講付録3演習参照）。つまり新たな添字を $(J, K, L) = (j-1, k-1, l-1)$ と定義すれば $\varepsilon_{1jkl} = \varepsilon_{JKL}$ と書ける（要するに $2,3,4$ と $1,2,3$ の並び替え方は同じということ）。そこで1行

目と1列目を除いた係数行列を $\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ として a_{11} 以外の最右辺は

$$\sum_{j,k,l=1}^4 \varepsilon_{1jkl} a_{j2} a_{k3} a_{l4} = \sum_{j,k,l=2}^4 \varepsilon_{1jkl} a_{j2} a_{k3} a_{l4} = \sum_{J,K,L=1}^3 \varepsilon_{JKL} a'_{J1} a'_{K2} a'_{L3} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

と書けることになり、この $|a'_{JK}|$ のように成分（添字）を定義し直した場合の行列式という意味で

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

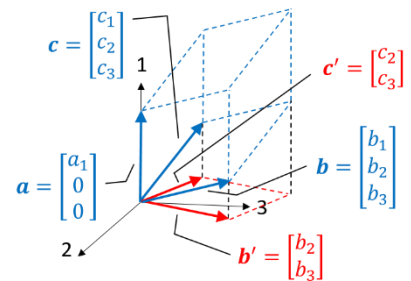
となる。以上の議論は、より高次にも全く同様に適用でき以下が成り立つことがわかる。

●(ix) 行列式の次数下げ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4-3-15)$$

※幾何学的解釈：3次を例とする。 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

左辺は3本のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が張る平行六面体の体積を表し、
右辺は $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ を2-3平面に射影した $\mathbf{b}', \mathbf{c}'$ が張る平行四辺形の面積に高さ a_1 を掛けたものとなる。このように n 次の場合
(n 次元体積)=(n 次元目の高さ) $\times$ ($n-1$ 次元体積)と解釈できる。



●(x) 上三角行列の行列式

成分 $a_{ij} = 0$ ($i > j$) となる（係数）行列を上三角行列といい、次数下げを繰り返し適用できる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (4-3-16)$$

他にも重要な行列式の性質があるが続きは次講としよう。行列を導入するときが来た(ようやくw)。

【4-4】行列の導入

【4-3-1】導入小話：もしかすると行列って・・・

拡大係数行列は、連立一次方程式を以下のように表示していた（とりあえず2行2列で）。

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right] \quad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

係数や定数項の値だけでなく、方程式そのものを表示するにはどうすればよいだろうか？

方程式なので両辺を等号で結ぶ形にしたい。連立方程式の定数項はセットにして等号の右辺に置きたい。変数も同じようにセットにして、係数行列と共に左辺に置きたい。こんな感じで。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

左辺を係数行列と変数の積とみて、積を定義しよう。方程式を再現させるには、左辺の係数のそれぞれの行と変数の列の積が、右辺定数項のそれぞれの値になるように、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad (4-4-1)$$

という演算を定義すればよいだろう。

ついでに連立方程式が変数変換しても成り立つようにしておこう。 $(x, y) \rightarrow (u, v)$ となる

$$\begin{cases} x = \alpha u + \beta v \\ y = \gamma u + \delta v \end{cases} \quad (4-4-2)$$

という変数変換³⁹を行うと、連立方程式の左辺は

$$\begin{cases} ax + by = a(\alpha u + \beta v) + b(\gamma u + \delta v) = (a\alpha + b\gamma)u + (a\beta + b\delta)v \\ cx + dy = c(\alpha u + \beta v) + d(\gamma u + \delta v) = (c\alpha + d\gamma)u + (c\beta + d\delta)v \end{cases} \quad (4-4-3)$$

となるが、(4-4-1) 式で定義した積を使うと、(4-4-2)式と(4-4-3)式はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

と書ける。これを(4-4-1) 式の両辺に代入すると

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix} \quad (4-4-4)$$

という積を定義すればよいだろう。ん？この積もしかして逆に掛けると

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + c\beta & b\alpha + d\beta \\ a\gamma + c\delta & b\gamma + d\delta \end{bmatrix}$$

となって、非可換⁴⁰だな。ま、しょうがないか。これを行列と呼ぶことにしよう。

・・・という感じで発見されたのかも。知らないけど。

³⁹ 一次変換であることに注意

⁴⁰ 可換：交換則が成り立つ ($ab = ba$)、非可換：交換則が成り立たない ($ab \neq ba$) ということ

[4-4-2] 行列と演算の定義

●行列：数や変数・定数・式などを表す文字を n 個 $\times$ m 個 の形に縦横に並べて、括弧でくくったものを**行列**といい数や文字をその**成分**という。本講座では、成分は実数のみ、行列は $n = m$ の場合（**正方行列**という）のみを対象とする。例外は後述する $1 \times n$ または $n \times 1$ 行列。

●行と列 例： 2×2 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 以降、この行列を例にとって説明する
横に並んだ a b や c d を**行**、縦に並んだ $\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$ や $\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}$ を**列**という⁴¹。行と列に関わるあらゆるものは、行が先、列が後の順番になる。例えば、 2×1 行列は2行1列の行列を意味し $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ のように書く。列のみの行列であり、**列ベクトル**（縦ベクトル）ともいう。同様に 1×2 行列は1行2列の行列を意味し $[a \ b]$ のように書く。行のみの行列であり、**行ベクトル**（横ベクトル）ともいう。

●成分：成分も行と列の順で表す。例えば $(1,2)$ 成分は1行2列目のことを指し、例では b を指す。添字を使って a_{ij} のように表記することもあり、 i 行 j 列目の成分を意味する。この場合、行列として表記すると $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ となる。混同しやすいので注意。 $a_{\text{行列}}$ ：行、列の順。

●表記：これまでの例のように括弧で成分をくくった表記以外に、 A のように（通常）大文字のアルファベットで表すこともある。その際、列ベクトルはベクトルの表記に習い x のように太文字で表す。またこの場合、行列式⁴²は $\det(A)$ と書かれる。ちなみに行列の括弧も大括弧 $[\]$ と小括弧 $(\)$ どちらもあるが、本講座では大括弧を採用する⁴³。

●対角成分と単位行列、零行列：例だと a や d のように行と列が一致した対角線上に並んだ成分を**対角成分**という。対角成分のみ1で、他は0となる成分をもつ行列を**単位行列**という。

例： $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 単位行列は E または I と表記される。本講座では E を採用する。

成分が全て0の行列を**零行列**という。通常アルファベット大文字の O と表記される。

●転置行列： $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ のように行と列の成分を入れ替えた行列を**転置行列**といい
行列 A の転置行列は A^T のように右肩に T を載せて表記する。成分の添字で表わすと $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$ ということになる。（左肩に t を載せ tA とする表記もある。）

⁴¹ 日本語は本来縦書きなので混同しやすいが、西洋では行とは横に並んだ文字列を指す

⁴² 英語では determinant といい、「決定因子」くらいの意味となる

⁴³ 使用している数式エディタの場合、小括弧だとやや見にくくなるので

●行列の和とスカラー積

ベクトルの和やスカラー積と同様に、成分同士の和、全成分に対する積と定義される。

$$\text{和: } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \quad \text{スカラー積: } k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \quad (4-4-5)$$

●行列と列ベクトル、行ベクトルと行列の積

- $n \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列である列ベクトルとの積が $n \times 1$ 行列の列ベクトルとなる。

n が 2, 3 の場合は以下のように定義される。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{bmatrix} \quad (4-4-6)$$

理論的な話の場合、添字での表記が用いられる事が多く、規則性が分かりやすくなる。

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \text{に対し} \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (4-4-7)$$

$\mathbf{y}$ の i 行目の成分は、 A の i 行と $\mathbf{x}$ との成分同士の積の和となっている事が分かる。

- $1 \times n$ 行列である行ベクトルと $n \times n$ 行列との積が $1 \times n$ 行列の行ベクトルとなる。

n が 2, 3 の場合は以下のように定義される。

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ax+dy+gz & bx+ey+hz & cx+fy+iz \end{bmatrix} \quad (4-4-8)$$

添字での表記では（列ベクトルの転置行列でもある行ベクトルを $\mathbf{x}^T$ のように表記して）

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T A \quad \text{に対し} \quad y_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \quad (4-4-9)$$

$\mathbf{y}^T$ の j 列目の成分は、 $\mathbf{x}^T$ と A の j 列との成分同士の積の和となっている事が分かる。

●行列と行列との積

$n \times n$ 行列と $n \times n$ 行列との積が $n \times n$ 行列となる。 n が 2, 3 の場合は以下のように定義される。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ar+bu+cx & as+bv+cy & at+bw+cz \\ dr+eu+fx & ds+ev+fy & dt+ew+fz \\ gr+hu+ix & gs+hv+iy & gt+hw+iz \end{bmatrix} \quad (4-4-10)$$

添字での表記では

$$AB = C \quad \text{に対し} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (4-4-11)$$

この場合、 C の (i, j) 成分は、 A の i 行と B の j 列との成分同士の積の和となる。

行列の積は一般に交換則を満たさない。つまり一般的には $AB \neq BA$ となることに注意。

【第4講】行列 I : 連立一次方程式

[4-4-3] 行列の基本性質

任意の正方行列 A, B, C 、単位行列 E 、零行列 O 、スカラー k, l に対して以下が成り立つ。

●和とスカラー積：ベクトル空間の公理を満たす

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| (i) $A + B = B + A$ | (vi) $(k + l)A = kA + lA$ |
| (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ | (vii) $k(lA) = (kl)A$ |
| (iii) $A + O = O + A = A$ | (viii) $1A = A, (-1)A = -A$ |
| (iv) $A + (-A) = (-A) + A = O$ | (ix) $0A = O, kO = O$ |
| (v) $k(A + B) = kA + kB$ | |

●積

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| (i) $(AB)C = A(BC)$ | (iii) $AE = EA = A$ |
| (ii) $(A + B)C = AC + BC$ | (iv) $OA = AO = O$ |
| $A(B + C) = AB + AC$ | |

[4-4-4] 連立一次方程式の行列による表示

行列とその積が定義されたので、行列を使って連立一次方程式を表してみよう。

例えば3元連立一次方程式の場合、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

に対して、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = b_i$$

また以下のようにも書ける。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

最後の式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、まるで一次方程式 $ax = b$ のようにもみえる。 $ax = b$ が $a \neq 0$ の時に $x = \frac{1}{a}b$ と解くことができたように、連立一次方程式も解けないのだろうか？この1次方程式の可解条件 $a \neq 0$ は、行列式 $|A| \neq 0$ に対応しているのではないか？

そもそも $\frac{1}{a}$ とは何だろう？ a の逆数である $\frac{1}{a}$ は一次方程式 $ax' = 1$ の解とみることもでき、この x' を右辺 b に掛けた $x'b$ が元の一次方程式 $ax = b$ の解とみることもできる。

このことを行列形式で書いた連立一次方程式に拡張してみよう。 $ax' = 1$ の右辺の1にあたるものは積の基本性質(iii)から単位行列 E としてよいだろう。左辺の a に相当するものは係数行列 A なので、 x' に相当するものも行列となり、 $AX' = E$ となりそう。標語的に書けば：

$$ax = b: ax' = 1 \rightarrow x = x'b \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}: AX' = E \rightarrow \mathbf{x} = X'\mathbf{b} ?$$

実際 $\mathbf{x} = X'\mathbf{b}$ として左から A を掛けると $A\mathbf{x} = AX'\mathbf{b} = E\mathbf{b} = \mathbf{b}$ となり式を満たすことになる。

この $AX' = E$ を満たす X' は、行列 A の逆数に相当するものといえるかも知れない。

3次を例に具体的に考えてみよう。 $AX' = E$ を成分で書くと

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。よく見ればこれは

$$x'_1 = \begin{bmatrix} x'_{11} \\ x'_{21} \\ x'_{31} \end{bmatrix}, x'_2 = \begin{bmatrix} x'_{12} \\ x'_{22} \\ x'_{32} \end{bmatrix}, x'_3 = \begin{bmatrix} x'_{13} \\ x'_{23} \\ x'_{33} \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

としたときの

$$Ax'_1 = e_1, \quad Ax'_2 = e_2, \quad Ax'_3 = e_3$$

という連立一次方程式3セットとみることもでき、 x'_1, x'_2, x'_3 をそれぞれ求めることができる。

もはや興味の対象は連立一次方程式を解くことから行列の逆数に相当するものに移っているが、 x'_1, x'_2, x'_3 を掃き出し法で求めてみよう。掃き出し法とは連立一次方程式 $Ax = b$ に対して行基本変形を用いて $[A|b] \rightarrow [E|x]$ として解く手法だった。行基本変形は直接加減し合うのは同じ列の間だけであり、係数行列が同じ場合は定数項である列ベクトルを並べ $[A|e_1 e_2 e_3] \rightarrow [E|x'_1 x'_2 x'_3]$ として3つの連立方程式を一度に解けることになる。この場合の拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

となる。実際に本講の冒頭の2例でみてみよう。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

これにそれぞれ行基本変形を適応させる。掃き出す手順は冒頭と全く同じことに注意。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_2 + r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] r_2 \times (-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] r_3 - r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] r_2 \times (-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - 2r_3 \\ r_2 - r_3 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 - 3r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] r_1 - r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] r_1 + r_2$$

この X' は実際に $AX' = E$ を満たすのか、 $X'b$ は元の連立方程式の解になるのか確かめよう。

【第4講】行列Ⅰ：連立一次方程式

元の連立方程式 ($Ax = b$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

に対して得られた行列 ($AX' = E$ となるはずの X') はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、実際に積 (AX') をとってみると (確かめよう)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

確かに積は単位行列となった。さらに元の連立方程式の右辺定数項との積 ($X'b$) は

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

となり、確かに冒頭で解いた解と一致するではないか (確かめよう)。

行列の逆数にあたるものを掃き出し法で求められそうなのがわかった。もしこの $AX' = E$ となる X' が $X'A = E$ でもあれば、 $Ax = b$ の左から X' を掛けて $x = X'b$ が直接いえ、まさに逆数に相当するといえそう。実は上記の例の X' は $X'A = E$ でもある (確かめよう)。このことは偶然なのだろうか？次講でこの行列の逆数にあたるものを含め、さらに深く探していこう。

【4-5】付録1：行列式の重要な性質

●行列式の重要な性質

3次を例として以下を考える。行列式は列をベクトルとしてみなし $a_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} e_i$ としたとき

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$$

として定義された。ここで $D(a_l, a_m, a_n)$ ($1 \leq l, m, n \leq 3$) を考えてみよう。まず $D(a_l, a_m, a_n)$ のベクトルの入れ替えに対する交代性により (l, m, n) の値が全て異なる場合のみ0以外の値を持ちえる。 $(l, m, n) = (1, 2, 3)$ の時は定義より行列式 $|A|$ となり、それ以外は同様にベクトルの入れ替えにより符号が変わるだけで (l, m, n) が $(1, 2, 3)$ の偶/奇置換のとき $\pm|A|$ となる。以上をまとめると

$$D(a_l, a_m, a_n) = \begin{cases} +|A| & \text{if } (l, m, n) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の偶置換 : } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -|A| & \text{if } (l, m, n) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の奇置換 : } (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

となり、これは $|A|$ を掛けた ε_{lmn} そのものである。よって 以下のように書けることになる。

$$D(a_l, a_m, a_n) = |A| \varepsilon_{lmn}$$

一方左辺は $a_l = \sum_{i=1}^3 a_{il} e_i$ 等により $\sum_{i,j,k=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} D(e_i, e_j, e_k) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{il} a_{jm} a_{kn}$

とも書けるため、結果として以下が成り立つ。

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{il} a_{jm} a_{kn} = |A| \varepsilon_{lmn} \quad (4-5-1)$$

この両辺に ε_{lmn} を掛けて添字 l, m, n の総和をとると ($\sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{lmn} = \sum_{l \neq m \neq n} 1 = 3!$ より)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} &= |A| \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{lmn} = 3! |A| \\ \therefore |A| &= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} \end{aligned} \quad (4-5-2)$$

が成り立つ。全く同様の議論により、 n 次の行列式に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} = |A| \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \quad (4-5-3)$$

$$|A| = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} \quad (4-5-4)$$

これにより、行列式の行と列は完全に対等である（従って同等の性質を持つ）ことがわかる。

3次を例に説明すると、(4-5-2)式を添字 l, m, n について展開し ε_{ijk} の交代性に着目し整理すると元の行列式の定義 $|A| = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$ に帰着するが、逆に添字 i, j, k について展開して整理することで $|A| = \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{lmn} a_{1l} a_{2m} a_{3n}$ を得る。前者が行列を列ベクトルの組として捉えているのに対し、後者は行ベクトルの組とした場合に相当し、行列式として両者は代数的に全く同じようにふるまい、列ベクトルとみなした場合に持つ（列に対する）性質は行ベクトルとみなした場合も（行に対して）同様に成り立つ。(4-5-2)式、(4-5-4)式はそう主張している。

●転置行列の行列式： $|A^T| = |A|$ （総和記号に不慣れな場合は 第2講 付録2 参照）

【証明】3次の場合でみると (4-5-2) 式および $a_{ij}^T = a_{ji}$ より

$$\begin{aligned} |A^T| &= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} a_{il}^T a_{jm}^T a_{kn}^T \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \frac{1}{3!} \sum_{l,m,n=1}^3 \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} a_{li} a_{mj} a_{nk} = |A| \end{aligned}$$

n 次の場合も同様となる。 ■

●行列の積の行列式： $|AB| = |A||B|$ （ついでに示す 本編での登場は第5講 第3節にて）

【証明】 $C = AB$ として3次の場合でみると $c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$ と (4-5-1) 式より

$$\begin{aligned} |AB| &= |C| = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} c_{i1} c_{j2} c_{k3} = \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{il} b_{l1} a_{jm} b_{m2} a_{kn} b_{n3} \\ &= \sum_{l,m,n=1}^3 \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{il} a_{jm} a_{kn} b_{l1} b_{m2} b_{n3} = \sum_{l,m,n=1}^3 |A| \varepsilon_{lmn} b_{l1} b_{m2} b_{n3} = |A||B| \end{aligned}$$

n 次の場合も同様となる。 ■

【4-6】付録 2 : 簡約行列の構造

簡約行列は定義に従うと rank に応じてとり得るパターンは限られ、例として行列の次数 2,3,4 に対して列挙すると以下のようになり、より高次も同様となる。

* の成分は任意の値 小括弧内の数字は (rank, 解の自由度) を表す

○ 2 次

$$(2,0): \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1,1): \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (0,2): \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

○ 3 次

$$(3,0): \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2,1): \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1,2): \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (0,3): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

○ 4 次

$$(4,0): \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3,1): \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2,2): \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1,3): \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (0,4): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

○主成分がない行：連立させる方程式が全て独立でない場合は行基本変形により掃き出され、その式に対応する行は全て 0 となり、行の入れ替えにより下の方に集められていく。連立方程式の解が不定となる場合、この全成分が 0 の行の数は、解の自由度を意味することになる。

○主成分がある行：残った主成分のある行の数が独立な式の数を意味する rank となる。(主成分の定義より) この行の 1 である主成分の左側は全て 0 となり、右側は任意の値(*)をとり得る。各主成分は行列の上から行を降りるごとに右側にすなわち階段状に配置され、配置される列の選び方：(次数) n 列の中から (rank) r 列を選ぶ組み合わせの数 ${}_nC_r$ だけパターンがあることになる。

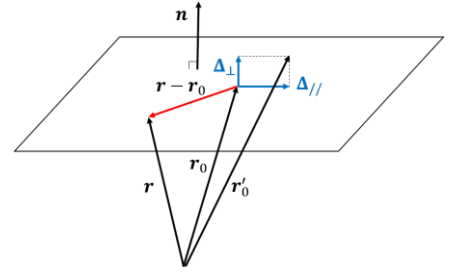
○主成分がある列：この列の主成分の下側はもちろん、上側の各成分の各行の左側に別の主成分があって任意の値をとり得る成分(*)も掃き出されて 0 となる。

○主成分がない列：この列の左側の列に主成分があれば、任意の値を持ちうるその行の成分(*)は掃き出すことができずに残る。左側のどの列にも主成分がなければ、主成分の左側は 0 なので、この主成分がない列は全て 0 となることになる。行基本変形は同じ列の間だけで直接加減しあうので、この列は最初から全て 0 すなわち該当する変数の係数が最初から全て 0 である特殊な場合となる。

【4-7】付録3：補足説明

● 3次元空間における平面の方程式

3次元空間における平面をベクトルで表そう。平面の法線ベクトルを $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 、平面の代表点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 、平面上の任意の点の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると、ベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ は法線ベクトル $\mathbf{n}$ と直交するので平面の方程式は $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ と書ける。



これは $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ となり右辺を d とすれば3元一次方程式 $ax + by + cz = d$ と解釈できる。今、 $\mathbf{r}_0$ を動かすことを考えよう。 $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \Delta_{\perp} + \Delta_{//}$ とし、変位量を平面に垂直な方向 $\Delta_{\perp}$ と平行な方向 $\Delta_{//}$ に分解して考えると、 $\mathbf{n}$ と $\Delta_{//}$ は直交するので、一次方程式の右辺 $d \rightarrow d' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'_0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 + \Delta_{\perp} + \Delta_{//}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{n} \cdot \Delta_{\perp} = d + \mathbf{n} \cdot \Delta_{\perp}$ となり、平面に平行な変位は d の変化に寄与しない。つまり同じ平面上の代表点 $\mathbf{r}_0$ のとり方には依らないことを意味する。逆に右辺 d が変化すると、平面全体は法線ベクトルの方向（逆向きを含む）に平行移動することになる。

● 行基本変形と線形結合関係

行基本変形が線形結合関係を保つことを、2次を例として示す。高次も同様となる。

2元連立一次方程式 $x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ が成り立つとき、行基本変形 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & | & c_1 \\ a_2 & b_2 & | & c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a'_1 & b'_1 & | & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & | & c'_2 \end{bmatrix}$ を行っても、 $x \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix}$ が成り立つことを示すことになる。

$$(A) \ r_1 \leftrightarrow r_2 : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & | & c_1 \\ a_2 & b_2 & | & c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & | & c_2 \\ a_1 & b_1 & | & c_1 \end{bmatrix}$$

$$x \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_2 + yb_2 \\ xa_1 + yb_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix}$$

$$(B) \ r_2 \times k : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & | & c_1 \\ a_2 & b_2 & | & c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & | & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & | & kc_2 \end{bmatrix} \quad (\text{他も同様})$$

$$x \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a_1 \\ ka_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ kb_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1 + yb_1 \\ k(xa_2 + yb_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ kc_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix}$$

$$(C) \ r_2 + kr_1 : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & | & c_1 \\ a_2 & b_2 & | & c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & | & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & | & c_2 + kc_1 \end{bmatrix} \quad (\text{他も同様})$$

$$x \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + ka_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 + kb_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 + k(xa_1 + yb_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 + kc_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix}$$

以上により題意は示された。 ■

【4-8】付録4：行列式の定義について

本講での行列式の定義が、線形代数の教科書によく載っているいわゆる行列式に対するライプニッツの明示公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

(S_n は n 次対称群、 $\text{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号を表す)

と同等であることを、3 次を例として解説する。まず置換 σ とは何かをごく簡単に説明する。

前講の[3-7-2] 拡張 Levi-Civita 記号の説明で、「(1,2,3)の数字の並びの順列は、 $3!=6$ 通りあり、(1,2,3)から2つの数字の入れ替えである互換の組み合わせで変換するとき、偶数回の互換で到達できる場合を偶置換、奇数回の互換で到達できる場合を奇置換といい、この偶奇性は互換のやり方によらない。」という話をした。この「置換」は本来以下のように定式化される。

(1,2,3) を (3,2,1) に変換する置換 σ を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ と書く。この場合、1 と 3 の互換 1 回で変換ができるのでこの置換 σ は奇置換となる。またこの置換 σ を各要素に注目して 1 が 3 に、2 が 2 に、3 が 1 に変換されることを $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$ と表記する。

この(1,2,3)の置換の集合は 3 次の**対称群** S_3 とよばれ、その要素は 3 の順列の数と等しく 6 つある。 S_3 の元である 6 通りの置換を全て書き下すと、

偶置換 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 奇置換 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 となり、符号を表す $\text{sgn}(\sigma)$ は置換 σ が偶置換の場合は +1、奇置換の場合は -1 を表す。

以上を用いて 3 次の行列式のライプニッツの明示公式は「3 次の全ての置換に対してその置換の符号付きで、行列の各行から置換に対応した列の要素を選んで積を作ったものの総和を取る」という手続きにより行列式を求める事となる。具体的には、

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &= \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &+ \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &+ \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

本講での定義では行列の要素は列番号を 1 から n に固定し、行番号を動かして総和を取る形式だった。付録1で示したように、行列式は行と列の性質が同等であるため両者は一致する。

【第 5 講】行列 II : 線形変換

【5-1】はじめに

前講では連立一次方程式をテーマとしてきた。一次方程式 $ax = b$ の見かたを変えて $y = ax$ として 1 次関数と見ることができたように、行列形式で書かれた連立一次方程式 $Ax = b$ を $y = Ax$ としてみると、これはベクトル x で表された点が行列 A で別のベクトル y で示される点に写されるものだと考えることができる。本講ではこの視点で行列や行列式、ベクトルがもつ性質を掘り下げていこう。最後に線形写像という一段高い位置から俯瞰することで理解を深め、次講に繋げていく。

【5-2】線形変換（一次変換）

【5-2-1】線形変換の例

式 $y = Ax$ のようにベクトル x を行列 A によってベクトル y に写す（対応させる）ことを**線形変換**（一次変換）という。例として下記の 2 次の行列 A で考えてみる。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

この行列による変換は、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{あるいは} \\ &\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-2-1)$$

という変換（まさに一次変換）となる。この式は、座標値 (x_1, x_2) の点が $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ に写されることを意味しているが、これを以下のようにとらえることもできる。

変換前の任意の点を表す位置ベクトル $x = x_1e_1 + x_2e_2$ は

$$y = Ax = A(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = x_1e'_1 + x_2e'_2 \quad (5-2-2)$$

と写されるとみることができる。これは標準基底 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が別の基底 e'_1, e'_2 に

$$e'_1 = Ae_1 : \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e'_2 = Ae_2 : \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-2-3)$$

として写され（対応させられ）、このとき写された基底を元の標準基底で表すと

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \end{cases} \quad (5-2-4)$$

となり、座標値の変換（5-2-1）式と異なる変換をしていると解釈できる。

この意味は後ほど述べる⁴⁴こととして、（5-2-2）式で変換された点は

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y = x_1e'_1 + x_2e'_2 = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

となり、当然（5-2-1）式と一致する。

以上の話を具体的に 2 次の行列で可視化してみよう。例として以下の行列で考えてみる。

⁴⁴ 本講第 5 節にて。

【第5講】行列 II：線形変換

$$A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

図は変換前の（灰色の）点線で描かれた直交座標系を張る標準基底 e_1, e_2 が（ピンク色の）鎖線で描かれた斜交座標系を張る基底 e'_1, e'_2 に

$$e'_1 = Ae_1 : \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e'_2 = Ae_2 : \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

として写されたものを重ねて描いたものであり

変換前の任意の点 $x = x_1e_1 + x_2e_2$ は (5-2-2)式

$$\begin{aligned} y &= Ax = A(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 \\ &= x_1e'_1 + x_2e'_2 \end{aligned}$$

より直交座標のある座標値の点が、斜交座標での同じ座標値の点に写されることがわかる。このようすは、図で変換前の直交座標での正方形の各頂点(0,3),(1,3),(1,2),(0,2)が変換後の斜交座標での該当する各頂点に写されていることからわかる。また原点を中心とした半径1の円が対応する斜交座標で原点から±1の範囲内に写されていることもわかる。

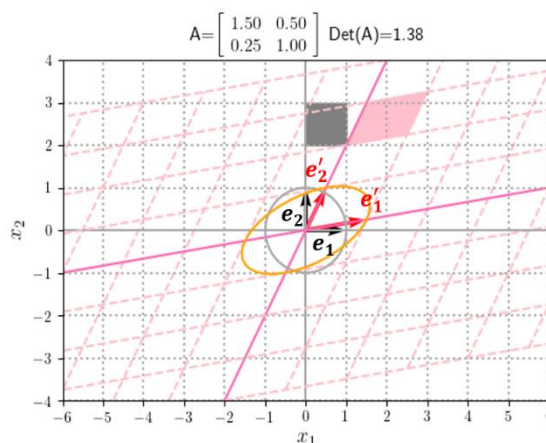


図 5-2-1

線形変換の特徴として、まず写された後の基底 e'_1, e'_2 を列ベクトルとして並べたものが、線形変換の行列となっている事があげられる。高次でも同様となり、この意味は第5節で詳しく述べる。

次に変換による面積の変化は、基底により張られる面積の変化によりわかるが、これはまさに我らが $D(a, b, c, \dots)$ 「関数」の出発点で行列式の値となり、高次でも成り立つ。この例では、 $|A| = \frac{3}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{8} = 1.375$ となり、変換前の標準基底が張る面積1に対して、1.375倍となり、四角形や円の面積も1.375倍となる。

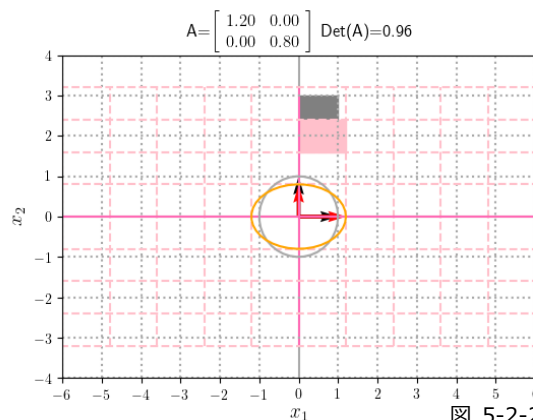


図 5-2-2

図 5-2-2 は行列が $\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ の例で、行列式の値は 0.96 となる。縦 0.8 倍、横 1.2 倍のスケール変換となっていることがわかる。

図 5-2-3 は行列が $\begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の例で、行列式の値は 1 となる。 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の形の変換は剪断（せんだん：shear）と呼ばれ面積を保つ変形を表すものとして知られる。

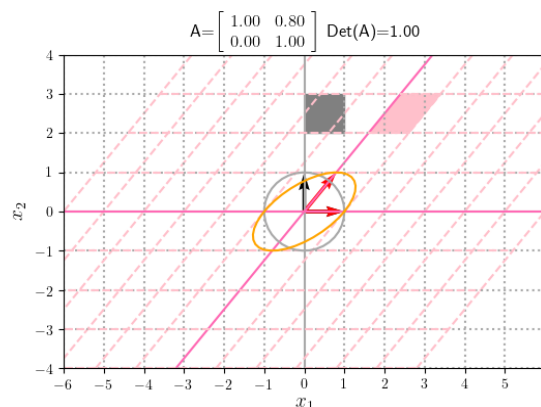


図 5-2-3

図 5-2-4 は行列が $\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$ の例で、原点を中心とした角度 $\pi/3$ の回転を表し、行列式の値は 1 となる。4 節で詳しくみることになる。

図 5-2-5, 図 5-2-6 は行列が

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の例で、「回転」「せん断」の合成変換を表している。このように線形変換を連続して行う場合、対応する行列の積が合成した変換を表すことになるが行列の積は非可換なのでその結果も一般的には異なる。この違いも 5 節で詳しく述べる。

図 5-2-7 は行列式が 0 となる例で、行列が

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ のときを示している。写された基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり真逆を向いて線形従属となり、平面上の点は全て直線上に写されていること（つまり面積は 0）が見て取れる。変換は

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

となり、直線 $x_2 = x_1 + a$ 上の点は全て点 $(-a, a)$ 上に、特に直線 $x_1 = x_2$ 上の点は全て原点に写されることになる。

前講の最後に行列の逆数に相当する行列を掃き出し法で求めた。これは線形変換では逆変換に当たるのではないかと。また上記の行列式が 0 で、ある直線上の点が全て同じ点に写されるような場合には逆変換は存在しなさそうだが、それと行列式が 0 とは繋がっているのではないかと。

これから課題となっていた行列の逆数にあたる行列について調べてみよう。

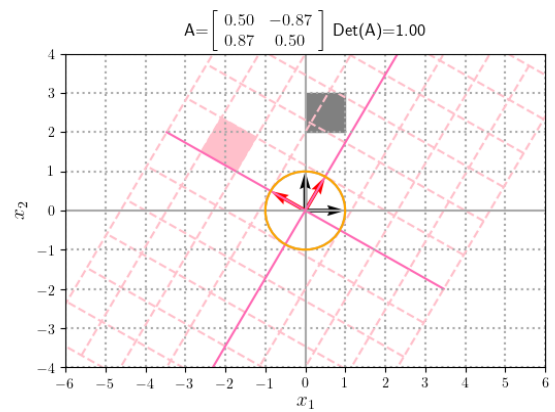


図 5-2-4

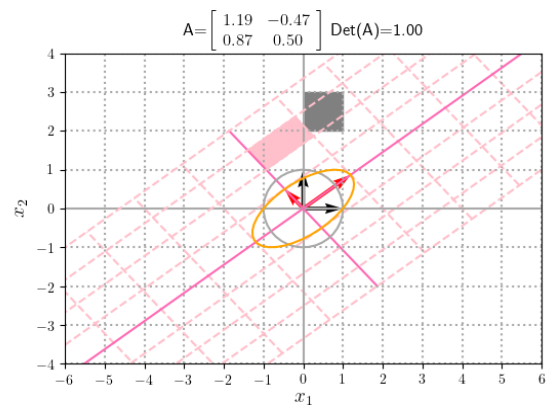


図 5-2-5

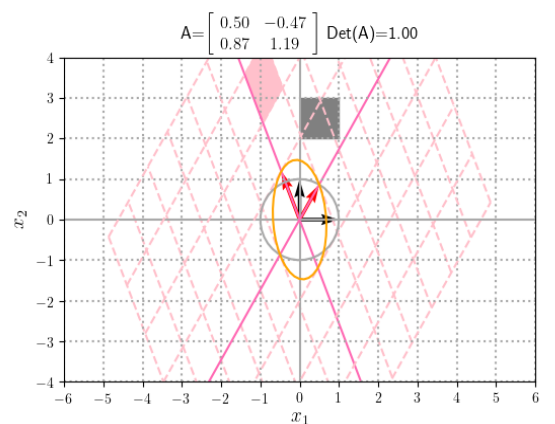


図 5-2-6

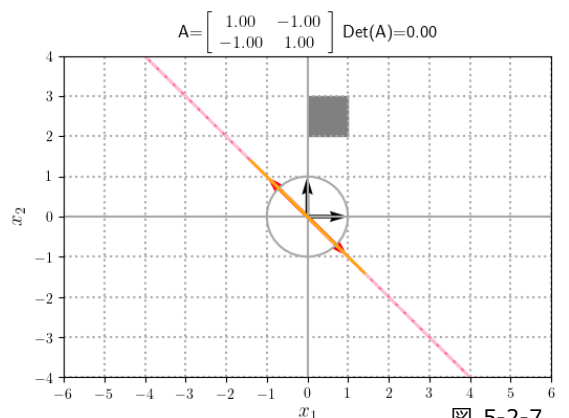


図 5-2-7

【5-3】逆行列

【5-3-1】行列式の性質 II：余因子展開と積の行列式

行列の逆数にあたる逆行列を求める上でまず必要となる行列式の性質をみてみよう。

3 次を例として行列式に対し以下のことを考えてみる。 $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ は $\mathbf{a}_1 = \sum_{i=1}^3 a_{i1} \mathbf{e}_i$ より

$$D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = a_{11}D(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + a_{21}D(\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) + a_{31}D(\mathbf{e}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

として 1 列目で展開できる。行列式の表記では

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となるが、右辺第 1 項は行列式の次数下げ(4-3-15)式を 3 次に適用すると以下ようになる。

$$a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ここで第 2 項は 1 度、第 3 項は 2 度、行を入れ換えて 1 行目に持っていけば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

と書ける（入れ換え時の符号の反転に注意）ので、行列式の次数下げを同様に適用すると

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

と書けることになる。

この 2 次の行列式の部分は、それぞれ以下のように

$$\begin{vmatrix} (a_{11}) & \cdots & \cdots \\ \vdots & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \vdots & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}) & \cdots & \cdots \\ \vdots & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \vdots & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}) & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

a_{11}, a_{21}, a_{31} のそれぞれの行と列の成分を除いた残りを詰めた形になっていることがわかる。

このような成分 a_{ij} の行と列の成分を除いて詰めた行列を小行列、その行列式を**小行列式**といい

M_{ij} と表す事が多い。上記の例ではそれぞれ M_{11}, M_{21}, M_{31} となる。

同様に 2 列目でも展開できる。 $\mathbf{a}_2 = \sum_{i=1}^3 a_{i2} \mathbf{e}_i$ より展開し行列式で表すと

$$D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = a_{12}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3) + a_{22}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3) + a_{32}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix}$$

となり、それぞれ 1 列目と入れ換えて

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ 1 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 1 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

さらに 1 列目のときと同様に第 2 項は 1 度の、第 3 項は 2 度の入れ換えで 1 行目に移して

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} 1 & a_{31} & a_{33} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

となる。この 2 次の行列式の部分も同様に以下のようにそれぞれ小行列式となる。

$$M_{12} : \begin{vmatrix} \cdots & (a_{12}) & \cdots \\ a_{21} & \vdots & a_{23} \\ a_{31} & \vdots & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} : \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{13} \\ \cdots & (a_{22}) & \cdots \\ a_{31} & \vdots & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} : \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{13} \\ a_{21} & \vdots & a_{23} \\ \cdots & (a_{32}) & \cdots \end{vmatrix}$$

また展開の際につく符号は、入れ換えの回数より $(-1)^{i+j}$ と書けることがわかる（確認しよう）。

この入れ換えによる符号 $(-1)^{i+j}$ を小行列の行列式 M_{ij} に付けた $(-1)^{i+j}M_{ij}$ を成分 a_{ij} の

余因子といい、 $\tilde{a}_{ij}$ （あるいは c_{ij} ）と書かれることが多い。

同様に 3 列目の展開は

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) &= a_{13}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) + a_{23}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_2) + a_{33}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3) \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となり、小行列式・余因子で表すと以下のように書ける。

$$\begin{aligned} &= (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} + (-1)^{2+3}a_{23}M_{23} + (-1)^{3+3}a_{33}M_{33} \\ &= a_{13}\tilde{a}_{13} + a_{23}\tilde{a}_{23} + a_{33}\tilde{a}_{33} \end{aligned}$$

元の展開式と比較すれば、余因子 $\tilde{a}_{ij}$ とは j 列目が標準基底の i 番目 $\mathbf{e}_i$ となる $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ のことでもあり、同じことだが j 列目が標準基底の i 番目となる行列式のことでもある。

これまでの話はそのまま n 次へ拡張されることもわかる。このような展開を**余因子展開**という。

- (xi) 列に対する余因子展開 (j 列目による展開)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} \quad (5-3-1)$$

行列式は列に対して成り立つ性質は行に対しても成り立つ。余因子展開は以下ようになる。

- (xii) 行に対する余因子展開 (i 行目による展開)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} \quad (5-3-2)$$

同様に余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は i 行目が標準基底の j 番目となる行列式でもあることになる（次項も参照）。

- (xiii) 正方行列 A, B の積の行列式は、それぞれの行列式の積

$$|AB| = |A||B| \quad (5-3-3)$$

証明は前講 付録 1 参照。なお証明をたどれば $|A| = 0$ or $|B| = 0$ のときも成り立つことに注意。

【5-3-2】 逆行列の定義と余因子行列による表示

前講の最後に考えた行列 A の逆数にあたる行列は $AX' = E$ を満たすもので、もしこれが $X'A = E$ でもあれば $Ax = \mathbf{b}$ の両辺に左から X' を掛けることで $\mathbf{x} = X'\mathbf{b}$ を得て実際に解を得た結果に結びつくのだった。また線形変換 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ も同様に左から X' を掛けることで $\mathbf{x} = X'\mathbf{y}$ と書けることになり逆変換となりそう。これらを踏まえ、逆行列を以下のように定義しよう。

【第5講】行列 II：線形変換

●逆行列と正則行列の定義

正方行列 A に対して行列 X が $AX = XA = E$ を満たすとき、

X を A の**逆行列**であるといい A^{-1} と表記する。逆行列を持つ行列を**正則行列**という。

(定義から A は A^{-1} の逆行列でもあることに注意)

3次を例として、それぞれ $AX = E$, $YA = E$ を満たす X, Y を考えてみよう。

まず以下の式を満たす行列 X を求める。

$$AX = E, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

前講の最後にやったように、行列 A, X, E を列ベクトルが並んだものとみなし

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を導入すれば、以下の3つの連立一次方程式となり

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \quad A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$$

さらにそれぞれを前講[4-2-4]でやったように列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の線形結合の形に書き直すと

$$\begin{aligned} x_{11}\mathbf{a}_1 + x_{21}\mathbf{a}_2 + x_{31}\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_1 \\ x_{12}\mathbf{a}_1 + x_{22}\mathbf{a}_2 + x_{32}\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_2 \\ x_{13}\mathbf{a}_1 + x_{23}\mathbf{a}_2 + x_{33}\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

と書いて、これを一つにまとめると以下の式になる。

$$x_{1j}\mathbf{a}_1 + x_{2j}\mathbf{a}_2 + x_{3j}\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_j$$

クラメル法則でみたように、これを $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ の $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ にそれぞれ代入すれば

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) &= x_{1j}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = x_{1j}|A| \\ D(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_3) &= x_{2j}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = x_{2j}|A| \\ D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_j) &= x_{3j}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = x_{3j}|A| \end{aligned}$$

とそれぞれ x_{1j}, x_{2j}, x_{3j} の項が残る。一方左辺は前項でみたように

$$D(\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \tilde{a}_{j1}, \quad D(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_3) = \tilde{a}_{j2}, \quad D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_j) = \tilde{a}_{j3}$$

として余因子となり結果 $\tilde{a}_{ji} = x_{ij}|A|$ と書ける。添字の順番が両辺で逆になっていることに注意。

ここで余因子を成分とする行列の**転置行列**として以下のように**余因子行列**を定義する。

$$\tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{転置しないものを余因子行列と定義する場合もあるので注意})$$

余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて、行列 A の行列式 $|A| \neq 0$ のとき $X = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ と求まる。

次に以下の式を満たす行列 Y を求める ($AX = E$ のときとほぼ同様となる)。

$$YA = E, \quad \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 Y, A, E を行ベクトルが並んだものとみなし、

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1^T &= [y_{11} \ y_{12} \ y_{13}], & \mathbf{y}_2^T &= [y_{21} \ y_{22} \ y_{23}], & \mathbf{y}_3^T &= [y_{31} \ y_{32} \ y_{33}] \\ \mathbf{a}_1^T &= [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}], & \mathbf{a}_2^T &= [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}], & \mathbf{a}_3^T &= [a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] \\ \mathbf{e}_1^T &= [1 \ 0 \ 0], & \mathbf{e}_2^T &= [0 \ 1 \ 0], & \mathbf{e}_3^T &= [0 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

を導入すれば、以下の 3 つの連立一次方程式となり、

$$\mathbf{y}_1^T A = \mathbf{e}_1^T, \quad \mathbf{y}_2^T A = \mathbf{e}_2^T, \quad \mathbf{y}_3^T A = \mathbf{e}_3^T$$

それぞれを行ベクトル $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T$ の線形結合の形に書き直すと

$$\begin{aligned} y_{11}[a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] + y_{12}[a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] + y_{13}[a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] &= [1 \ 0 \ 0], & y_{11}\mathbf{a}_1^T + y_{12}\mathbf{a}_2^T + y_{13}\mathbf{a}_3^T &= \mathbf{e}_1^T \\ y_{21}[a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] + y_{22}[a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] + y_{23}[a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] &= [0 \ 1 \ 0], & y_{21}\mathbf{a}_1^T + y_{22}\mathbf{a}_2^T + y_{23}\mathbf{a}_3^T &= \mathbf{e}_2^T \\ y_{31}[a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] + y_{32}[a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] + y_{33}[a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] &= [0 \ 0 \ 1], & y_{31}\mathbf{a}_1^T + y_{32}\mathbf{a}_2^T + y_{33}\mathbf{a}_3^T &= \mathbf{e}_3^T \end{aligned}$$

と書いて、これを一つにまとめると以下の式になる。

$$y_{i1}\mathbf{a}_1^T + y_{i2}\mathbf{a}_2^T + y_{i3}\mathbf{a}_3^T = \mathbf{e}_i^T$$

これを $D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T)$ の $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T$ にそれぞれ代入すれば⁴⁵、それぞれ y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} の項が残る

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e}_i^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) &= y_{i1}D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) = y_{i1}|A| \\ D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{e}_i^T, \mathbf{a}_3^T) &= y_{i2}D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) = y_{i2}|A| \\ D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{e}_i^T) &= y_{i3}D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) = y_{i3}|A| \end{aligned}$$

となる。また左辺を行列式で表せば、例として以下のようになり余因子となることわかる。

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e}_3^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{13}, & D(\mathbf{e}_i^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) &= \tilde{a}_{1i} \\ D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{e}_1^T, \mathbf{a}_3^T) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{21}, & D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{e}_i^T, \mathbf{a}_3^T) &= \tilde{a}_{2i} \\ D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{e}_2^T) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \tilde{a}_{32}, & D(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{e}_i^T) &= \tilde{a}_{3i} \end{aligned}$$

左辺を余因子として結果 $\tilde{a}_{ji} = y_{ij}|A|$ と書ける。添字の順番が両辺で逆になっていることに注意。

余因子行列を用いて、行列 A の行列式 $|A| \neq 0$ のとき $Y = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ と求まる。

3 次を例とした以上の議論は、より高次にも全く同様に適用され n 次の正方行列 A に対し

$AX = E, YA = E$ を満たす X, Y は、 $|A| \neq 0$ のとき $X = Y = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ となり逆行列の定義を満たす。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \quad (|A| \neq 0) \quad (5-3-4)$$

これは逆行列の余因子行列による表示となる。次項でこの逆行列の性質を調べよう。

[5-3-3] 正則行列/逆行列の性質

(i) 逆行列は一意：正則な行列がもつ逆行列は一意に定まる (5-3-5)

$AX = XA = E, AY = YA = E$ を満たす任意の X, Y に対し $AY = E$ の両辺に左から X を掛けると $XAY = X$ となるが $XA = E$ より $EY = X$ したがって $Y = X$ がいえて、題意は示された。 ■

(ii) $|A^{-1}| = 1/|A|$: (正則行列の) 逆行列の行列式は行列式の逆数となる (5-3-6)

$A^{-1}A = E$ の両辺の行列式は $1 = |E| = |A^{-1}A| = |A^{-1}||A|$ となり $\therefore |A^{-1}| = 1/|A|$ ■

⁴⁵ $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ のベクトルは列ベクトルと限られているわけではなく、行ベクトルとみなしても良い。そもそも $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 自体には行や列の概念はなく、列をベクトルとみなして定義した場合の行も、列と同じ性質を持つ（逆もしかり）という関係にあること（第 4 講 付録 1 参照）に注意。

【第5講】行列 II：線形変換

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$: 正則行列の積も正則で、積の逆行列は逆行列の逆順の積 (5-3-7)

AB に $B^{-1}A^{-1}$ を掛ける。左側から : $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$

右側から : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$ となり、題意を満たす。 ■

(iv) 正方行列 A に対し $AX = E$ または $XA = E \Rightarrow X = A^{-1}$ (5-3-8)

$AX = E$ の両辺の行列式を求めると、 $1 = |E| = |AX| = |A||X|$ となり $|A| \neq 0$ がいえ、

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$ となる $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ が求まる。 $AX = E$ の両辺に左側から A^{-1} を掛けると、

$A^{-1}AX = A^{-1}E \therefore X = A^{-1}$ となる。 $XA = E$ の場合も同様。よって題意は示された。 ■

・性質(i)により、 $Ax = b$ に対し $|A| \neq 0$ のとき $x = A^{-1}b$ として得る解の一意性がいえる。

・性質(iv)により、前講の最後に掃き出し法で求めた方法でも逆行列が求まることがわかった。

● n 次正方行列 A に対して以下の条件は全て同値となる (5-3-9)

(i) A は正則行列である

(ii) 行列式 $|A| \neq 0$

(iii) $Ax = 0$ が自明な解のみをもつ

(iv) A を列ベクトルの組とみなしたとき、その組は線形独立である

(iv') A を行ベクトルの組とみなしたとき、その組は線形独立である

(v) $\text{rank}(A) = n$

【証明】

・ (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$A^{-1}A = E$ の両辺の行列式 $1 = |E| = |A^{-1}A| = |A^{-1}||A|$ より $|A| \neq 0$ がいえる。

・ (ii) $\Rightarrow$ (iii) :

$|A| \neq 0$ より A^{-1} となる $\frac{1}{|A|}\tilde{A}$ が求まり $Ax = 0$ の両辺に左から掛け一意な解 $x = 0$ を得る。

・ (iii) $\Rightarrow$ (iv) :

A を列ベクトルの組 $[a_1 \cdots a_n]$ とみなすと $Ax = 0$ は $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0$ と書けるが、自明な解のみなので $x_1 = \cdots = x_n = 0$ のみとなり、列ベクトルの組 $a_1, \dots, a_n$ は線形独立となる。

・ (iv) $\Rightarrow$ (v) :

前講[4-2-4]の考察でみたように行基本変形は線形結合関係を保ち、簡約行列となっても列は線形独立なままとなる。このとき行 0 ベクトルが生じると、掃き出せない列が生じてその列は主成分をもつ他の列ベクトルの組の線形結合で表されることになり線形従属となって矛盾する。よって行 0 ベクトルは生じず、結果主成分は n 個存在することになり $\text{rank}(A)$ は n となる。

・ (v) $\Rightarrow$ (i) :

rank が n なので 行列 A に対して掃き出し法で $AX = E$ を満たす X が求まり、(5-3-8)より X は逆行列 A^{-1} であることがいえ A は正則行列といえる。

以上により (i), (ii), (iii), (iv), (v) は全て同値であることが示された⁴⁶。

最後に (ii) $\Leftrightarrow$ (iv') を示す。(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) と $|A^T| = |A|$ より「(iii') $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$ が自明解のみをもつ」に対し (ii) $\Leftrightarrow$ (iii') となり、また (iii) $\Rightarrow$ (iv) と同様に (iii') $\Rightarrow$ (iv') がいえ、逆にたどれば (iv') $\Rightarrow$ (iii') もいえるので (iii') $\Leftrightarrow$ (iv') がいえる。よって (ii) $\Leftrightarrow$ (iv') が成り立つ。

以上により題意は示された。 ■

- ・ 上記において (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) より前講 (4-3-12) の行列式の性質(vi')が示された。
- ・ (iv), (iv') $\Leftrightarrow$ (ii), (v) より[4-2-4]項で考察した係数行列の行・列ベクトルが線形独立であることと行列式が非零であることとの同値性、また求まる解の一意性も示された。

蛇足ながらクラメル法則で解いた解と逆行列を用いて解いた解との関係を確認しておこう。

3次を例として連立一次方程式 $\sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = b_i$ or $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ において、
 $D(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = x_1 |A|$, $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3) = x_2 |A|$, $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = x_3 |A|$ の各左辺を $D(\sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \sum_{j=1}^3 b_j D(\mathbf{e}_j, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \sum_{j=1}^3 b_j \tilde{a}_{j1}$ のように余因子で表すことでまとめて $\sum_{j=1}^3 b_j \tilde{a}_{ji} = x_i |A|$ と書け、これは $|A| \neq 0$ のとき $x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^3 \tilde{a}_{ij} b_j$ あるいは $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$ と逆行列を用いた解となる。

線形変換 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ において、行列 A が正則である場合すなわち $|A| \neq 0$ のときは逆行列 A^{-1} を両辺の左側から掛けることにより $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ なる逆変換が求まることがわかった。さらに詳しいことは第5節で述べるとして、次節では重要な線形変換である回転を表す行列を調べよう。

【5-4】直交行列

【5-4-1】転置行列の性質

直交行列を議論する前に関係の深い転置行列の性質を簡単にみておこう。

●転置行列の性質

(i) $(AB)^T = B^T A^T$: 積の転置行列は順序を逆にした転置行列の積 (5-4-1)

$$\{(AB)^T\}_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ik} a_{kj}^T = (B^T A^T)_{ij} \quad \therefore (AB)^T = B^T A^T \quad \blacksquare$$

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$: 正則行列の転置行列の逆行列は逆行列の転置行列 (5-4-2)

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \text{ の両辺の転置をとると } E = E^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T \text{ また } E = E^T =$$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \text{ となり、これは } (A^{-1})^T \text{ が } A^T \text{ の逆行列となることを示している。} \quad \blacksquare$$

⁴⁶ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) より (ii) $\Rightarrow$ (i) がいえて (i) $\Rightarrow$ (ii) でもあるので (i)と(ii)は同値。同様に (iii) $\Rightarrow$ (ii) がいえて (ii) $\Rightarrow$ (iii) でもあるので (ii)と(iii) も同値となり、さらに同様に (iii)と(iv)、(iv)と(v) の同値もいえるので (i), (ii), (iii), (iv), (v) は全て同値となる。

【第5講】行列 II：線形変換

●内積の表示

列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ の標準内積を $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{y} = [x_1 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ として定義する。

[5-4-2] 直交行列の定義と性質

●直交行列の定義

$R^T R = R R^T = E$ を満たす正方行列 R を**直交行列**という。

●直交行列の性質

(i) 直交行列は正則行列であり、 R の逆行列は R^T (定義より明らか) (5-4-3)

(ii) 行列式は $|R| = \pm 1$ (5-4-4)

$R^T R = E$ の両辺の行列式を求めると、 $|R^T| = |R|$, $|E| = 1$ より $|R|^2 = 1 \quad \therefore |R| = \pm 1$ ■

(iii) R_1, R_2 が直交行列のとき、その積もまた直交行列 (5-4-5)

$(R_1 R_2)^T (R_1 R_2) = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = R_2^T R_2 = E, (R_1 R_2)(R_1 R_2)^T = R_1 R_2 R_2^T R_1^T = R_1 R_1^T = E$ ■

(iv) 正方行列 R において $R^T R = E$ または $RR^T = E \Rightarrow R$ は直交行列である (5-4-6)

(5-3-8)から $R^T R = E$ のとき $R^T = R^{-1}$ がいえ $RR^T = E$ も成り立つので R は直交行列といえる。 $RR^T = E$ のときも同様。よって題意は示された ■

● n 次正方行列 R に対して以下の条件は全て同値となる (5-4-7)

(i) R は直交行列である

(ii) R による線形変換が内積を不変に保つ ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, (R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$)

(iii) R による線形変換がノルムを不変に保つ ($\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|R\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$)

(iv) R を列ベクトルの組とみなしたとき、その組は正規直交基底をなす

(iv') R を行ベクトルの組とみなしたとき、その組は正規直交基底をなす

【証明】

・ (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$(R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) = (R\mathbf{x})^T (R\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^T R^T) (R\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (R^T R) \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ よって内積は不変となる。

・ (ii) $\Rightarrow$ (iii) :

$(R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ において $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ とすると $\|R\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ よってノルムは不変となる。

• (iii) $\Rightarrow$ (iv) :

$R = [r_1 \cdots r_n]$ のとき標準基底 e_i に対して $Re_i = r_i$ より $\|r_i\| = \|Re_i\| = \|e_i\| = 1$ がいえ、
また $R(e_i + e_j) = r_i + r_j$ より $i \neq j$ のとき $\|r_i + r_j\| = \|R(e_i + e_j)\| = \|e_i + e_j\| = \sqrt{2}$ となり
両辺を 2 乗して $\|r_i\|^2 + \|r_j\|^2 + 2r_i \cdot r_j = 2$ より $r_i \cdot r_j = 0$ がいえて、 $r_i \cdot r_j = \delta_{ij}$ を得る。

• (iv) $\Rightarrow$ (i) :

$$R^T R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{bmatrix} [r_1 \cdots r_n] = \begin{bmatrix} r_1^T r_1 & \cdots & r_1^T r_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n^T r_1 & \cdots & r_n^T r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cdot r_1 & \cdots & r_1 \cdot r_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n \cdot r_1 & \cdots & r_n \cdot r_n \end{bmatrix} = E \text{ がいえて、}$$

性質(iv) : (5-4-6) より R は直交行列となる。

• (i) $\Leftrightarrow$ (iv') : (R の i 行目の行ベクトルをここでは $\check{r}_i$ と書くとする)

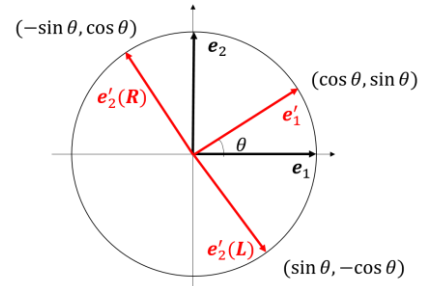
$$RR^T = \begin{bmatrix} \check{r}_1 \\ \vdots \\ \check{r}_n \end{bmatrix} [\check{r}_1^T \cdots \check{r}_n^T] = \begin{bmatrix} \check{r}_1 \check{r}_1^T & \cdots & \check{r}_1 \check{r}_n^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{r}_n \check{r}_1^T & \cdots & \check{r}_n \check{r}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{r}_1 \cdot \check{r}_1 & \cdots & \check{r}_1 \cdot \check{r}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{r}_n \cdot \check{r}_1 & \cdots & \check{r}_n \cdot \check{r}_n \end{bmatrix} \text{ よって ((5-4-6) より)}$$

R は直交行列であることと行ベクトルの組が正規直交基底とは同値となる。

以上により (i), (ii), (iii), (iv), (iv') は同値であることが示された。 ■

直交行列による変換 (**直交変換**) は (5-4-7)よりベクトルのノルム・内積が不変な (大きさ・角度を保つ) 変換となる。このような変換を**等長変換**という (厳密には原点を原点に写す等長変換)。

例として 2 次の直交行列で見てみよう (3 次は第 7 講 回転の表現 I にて詳しくみる)。任意の正規直交基底を e'_1, e'_2 とし、これを列ベクトルとする行列 $[e'_1 \ e'_2]$ は上記条件(iv)より直交行列となる。標準基底を e_1, e_2 とし、図のように e_1, e'_1 のなす角を θ とすると、 $e'_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ となる。 e'_2 は e'_1 と直交するが向き付けにより 2 通りとることができる。



図の $e'_2(R) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ は e'_1 とともに右手系の座標系を張り、直交行列は $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ となり 2 次元の**回転**を表し、行列式は+1 となる。 $e'_2(L) = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix}$ は e'_1 とともに左手系の座標系を張り、直交行列は $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ となる。これは e_1 を軸とした反射を表す直交行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と回転を表す直交行列との積: $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と解釈でき、2 次元の**鏡映**: 座標軸反射と回転の合成を表すこととなり、行列式は -1 となる。

なお $\theta = \pi/2$ の回転に相当する $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に関する面白い話があるので付録 2 で紹介する。

より高次でも行列式が+1 のとき直交行列は向き付けを変えない等長変換すなわち回転を表し、これを**回転行列**という。 n 次の直交行列の条件式 $R^T R = E$ の独立な式は $n + (n^2 - n)/2$ 個であり、直交行列の独立な成分の個数、すなわち**回転の自由度**は n^2 からこれを引いて $\frac{1}{2}n(n-1)$ となる。

(反射等の変換は連続したパラメータを持たず、これを除いても変換の自由度は変わらない。)

【5-5】線形変換の行列による表示

【5-5-1】この節のねらい

本来のベクトルが基底の取り方に依らない概念だったのに対し $n \times 1$ 行列である列ベクトルはある基底（通常は標準基底）に対する成分としての表示であり、それ自体は基底に依存する表示であることに注意を要する。実は行列も同様であり、ここで改めて任意の基底に対する表示として定式化する。最初は「抽象的だ」「回りくどい」と思うかもしれないが、基底の変換や合成変換など、基底が絡む混乱しがちな話を理解しやすくなり、話が進むにつれその意義がわかってくると思う。

【5-5-2】必要な諸定義

●写像（関数の概念の一般化）

ある集合の全ての元それぞれをある集合の一意な元に対応させる規則のことを**写像(mapping)**という。集合 U の元を集合 V の元に写す写像を f とする（上図左）。これを $f: U \rightarrow V$ と書き、また特に元 $x \in U$ が $f(x) \in V$ に写されることを $f: x \mapsto f(x)$ と書く。関数と同様に $f(x)$ は一意に定まり（つまり1対多の対応はダメ）任意の $x \in U$ に対して $f(x) \in V$ となること（つまり「定義域」は U 全体、「値域」は V の一部でも可）に注意。写像が1対1で「値域」が V 全体の場合（上図右）逆向きの写像が定まる。これを**逆写像**といい f^{-1} で表す。

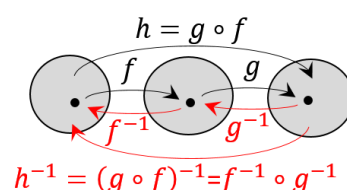
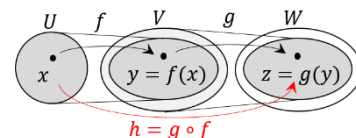


●合成写像

写像 $f: U \ni x \mapsto y = f(x) \in V$, $g: V \ni y \mapsto z = g(y) \in W$ に対し（上図）、 U から W への写像 $h: U \ni x \mapsto z \in W$ を $z = g(f(x))$ と定義し、これを $h = g \circ f$ と書いて f, g の**合成写像**という。

合成写像 $h = g \circ f$ の f, g がそれぞれ逆写像をもつとき（右図）

その合成は $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ となることに注意。



●線形写像

ベクトル空間 $U \rightarrow V$ への写像 f （ベクトルをベクトルに写す写像）が $\forall x, y \in U, \forall k \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(kx) = kf(x) \quad (5-5-1)$$

を満たすとき、この写像を**線形写像**という。定義より $f(x)$ もベクトルである。特にベクトル空間 U, V が同じベクトル空間である場合、この線形写像のことを**線形変換**ともいう。この線形写像（および線形変換）自体は、ベクトルと同様に基底の取り方に依らない概念であることに注意。

【5-5-2】ベクトルの列ベクトルによる表示

任意のベクトルは ある基底の線形結合として表すことができ、列ベクトルはこの係数の組を各成分として縦に並べて表したものであり、逆に列ベクトルの各成分による基底の線形結合の結果が元の（基底に依らない）ベクトルとなると考えることができる。このことを定式化してみよう。

n 次元ベクトル空間 U の任意の元であるベクトル x が、 U の任意の基底 $B = \{b_i\}$ (b_i の集合) の線形結合として $x = \sum_{i=1}^n b_i x_i^B$ と表されているとき⁴⁷、この係数 x_i^B を用いて

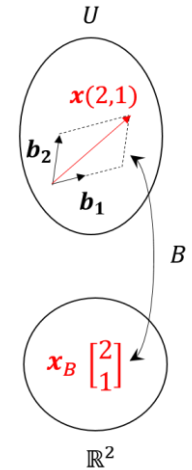
ベクトル x の基底 $\{b_i\}$ に対する列ベクトル表示 $x_B = \begin{bmatrix} x_1^B \\ \vdots \\ x_n^B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を得る。

逆に基底 $\{b_i\}$ の各ベクトルを各成分にもつ「行ベクトル」($b_1 \cdots b_n$) と列ベクトル x_B との積として以下のように基底の線形結合としてのベクトル x を得る。

$$x = (b_1 \cdots b_n)x_B = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} x_1^B \\ \vdots \\ x_n^B \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n b_i x_i^B \in U \quad (5-5-2)$$

(ここで x_i^B の右肩および x_B の右下の B は基底 B に対する表示を示し、また「 U 上のベクトルを成分に持つ行ベクトル」として小括弧を用いている⁴⁸。)

以上により列ベクトル x_B は U 上のベクトル x の基底 $B = \{b_i\}$ に対する $\mathbb{R}^n$ 上での表示となる。



[5-5-3] ベクトルの組の行列による表示

n 次元ベクトル空間 U の任意の n 本のベクトル a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) の組の表示を考える。各 a_j が U の任意の基底 $B = \{b_i\}$ の線形結合として $a_j = \sum_{i=1}^n b_i a_{ij}^B$ と表されているとき、この係数 a_{ij}^B を用いてベクトル a_j

の基底 $\{b_i\}$ に対する列ベクトル表示 $a_j = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} a_{1j}^B \\ \vdots \\ a_{nj}^B \end{bmatrix} = (b_1 \cdots b_n) a_{jB}$

を得る。この列ベクトル表示を横に並べることでベクトルの組 $\{a_j\}$ を各成分にもつ「行ベクトル」($a_1 \cdots a_n$) (基底という意味ではない) として

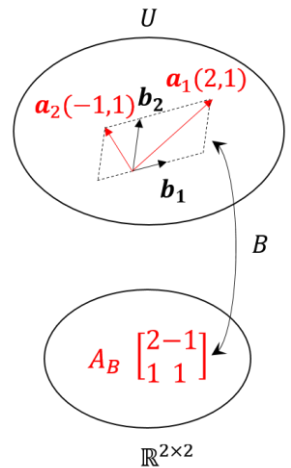
$$(a_1 \cdots a_n) = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} a_{11}^B & \cdots & a_{1n}^B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^B & \cdots & a_{nn}^B \end{bmatrix} = (b_1 \cdots b_n) A_B \quad (5-5-3)$$

と書けることになり、これはベクトルの組 $\{a_j\}$ の基底 $\{b_i\}$ に対する行列 A_B による表示と解釈できる。このベクトルの組 $\{a_j\}$ の線形独立性と表示行列 A_B の正則性には以下の関係がある。

● ベクトルの組 $\{a_j\}$ が線形独立 $\Leftrightarrow$ その表示行列 A_B が正則 (5-5-4)

$\{a_j\}$ の線形結合 $\sum_{j=1}^n c_j a_j = \mathbf{0}$ は $a_j = \sum_{i=1}^n b_i a_{ij}^B$ より $\sum_{i,j=1}^n b_i a_{ij}^B c_j = \mathbf{0}$ と書け $\{b_j\}$ は線形独立なので $\sum_{j=1}^n a_{ij}^B c_j = 0$ すなわち $A_B c = \mathbf{0}$ となり (5-3-9): (i) $\Leftrightarrow$ (iii) ((iv)ではない) より示された。■

なお本項の話で $\{a_j\}$ を基底 $\{b_i\}$ 自身とした場合を考えると基底 $\{b_i\}$ の基底 $\{b_i\}$ に対する表示行列は単位行列となり、表示された列ベクトルの組は常に $\mathbb{R}^n$ の「標準基底」となることがわかる。



⁴⁷ 線形結合の係数である成分を基底であるベクトルの右に書くのには理由があり、すぐあとでわかる

⁴⁸ これらの表記法は特に一般的なものではない。また本節以外で特に必要でない場合は省略される。

[5-5-4] 線形変換の行列による表示

n 次元ベクトル空間 U の任意の元 x がある線形変換 $f: U \rightarrow U$ で

$$y = f(x) \quad (5-5-5)$$

に写されるとする。ベクトル x, y を U の任意の基底 $B = \{b_i\}$ に対する列ベクトルで表示すると

$$x = (b_1 \cdots b_n)x_B, \quad y = (b_1 \cdots b_n)y_B \quad (5-5-6)$$

となり、(5-5-6)式を (5-5-5)式に代入して以下ようになる。

$$(b_1 \cdots b_n)y_B = f(\sum_{i=1}^n b_i x_i^B) = \sum_{i=1}^n f(b_i) x_i^B = (f(b_1) \cdots f(b_n))x_B \quad (5-5-7)$$

n 本のベクトルの組である $f(b_j)$ は基底 $\{b_i\}$ に対する行列で表示でき

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^n b_i a_{ij}^B \quad \text{or} \quad (f(b_1) \cdots f(b_n)) = (b_1 \cdots b_n)A_B \quad (5-5-8)$$

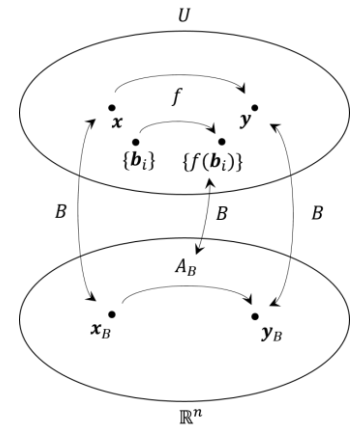
これを (5-5-7)式に代入して $(b_1 \cdots b_n)y_B = (b_1 \cdots b_n)A_B x_B$ となり、

基底 $\{b_i\}$ は線形独立なので以下を得る。

$$y_B = A_B x_B \quad \text{or} \quad y_i^B = \sum_{j=1}^n a_{ij}^B x_j^B \quad (5-5-9)$$

以上により行列 A_B は U 上の線形変換 f の基底 $B = \{b_i\}$ に対する

$\mathbb{R}^{n \times n}$ 上での表示と解釈できる。またこのことはベクトル空間の公理を満たすベクトル空間の元が線形変換（写像）されるとき、どんなものでも行列（および列ベクトル）で表示できることを意味する。



例として本講第2節での線形変換 $y = Ax$ について考察しよう。この $y = Ax$ は、あるベクトル空間 U の標準基底 $E = \{e_i\}$ に対し表示された $y_E = A_E x_E$ のことだと解釈でき、 x_E, y_E として表示された U のベクトル x, y は $x = (e_1 \cdots e_n)x_E, y = (e_1 \cdots e_n)y_E$ のことであり、また行列 A_E として表示された線形変換 f は

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i a_{ij}^E = (e_1 \cdots e_n)a_{jE} \quad \text{or} \quad (f(e_1) \cdots f(e_n)) = (e_1 \cdots e_n)A_E$$

を満たすものであると考えることができる。

実際、基底 e_j が写る先を $e'_j = f(e_j)$ として $e'_j = \sum_{i=1}^n e_i a_{ij}^E$ と書くと (5-5-9)式との違いが、基底を写す(5-2-4)式と座標値の変換 (5-2-1)式との違いに相当する。また(5-5-7)式に相当する

$y = (f(e_1) \cdots f(e_n))x_E = (e'_1 \cdots e'_n)x_E$ は、変換先の点を表す y は変換元の座標系での座標値 (x_E) を座標値とした e'_j が張る座標系により示される点であることを示している。さらに行列の各列ベクトルが e'_j の基底 $\{e_j\}$ に対する表示になるということに相当している。

注意すべきは、基底が写る先 $e'_j = f(e_j)$ の組は必ずしも線形独立になるとは限らないという点であり、(5-5-4)より $f(e_j)$ の組の線形独立性と表示行列 A_E の正則性が同値となる。基底が写る先が線形独立であれば、逆変換として元の基底をその線形結合で表すことができ、その表示が逆行列となる。式で書くと $(e'_1 \cdots e'_n) = (e_1 \cdots e_n)A_E$ に対して逆に $(e_1 \cdots e_n) = (e'_1 \cdots e'_n)C$ と表せて、これに先の式を代入すると $(e_1 \cdots e_n) = (e_1 \cdots e_n)A_E C$ より $A_E C = E$ つまり $C = A_E^{-1}$ となる。

[5-5-5] 基底の変換と座標変換

n 次元ベクトル空間 U の任意の元 x が2組の基底 $B = \{b_i\}, C = \{c_i\}$

に対する列ベクトル x_B, x_C として、それぞれ

$$x = (b_1 \cdots b_n)x_B = (c_1 \cdots c_n)x_C \quad (5-5-10)$$

と表されているとする。 $\{c_i\}$ は n 本のベクトルの組なので (5-5-3) 式の

ように基底 $\{b_i\}$ に対する行列で表示することができ、

$$(c_1 \cdots c_n) = (b_1 \cdots b_n)P_{B \rightarrow C} \quad \text{or} \quad c_j = \sum_{i=1}^n b_i p_{ij}^{B \rightarrow C} \quad (5-5-11)$$

と書ける。この $P_{B \rightarrow C}$ を**基底の変換行列**という。

これを (5-5-10)に代入して $x_B = P_{B \rightarrow C}x_C$ となる。変換の向きが異なるこ

とに注意。基底はそれぞれ線形独立なので (5-5-4)より $P_{B \rightarrow C}$ は正則

行列となり逆行列を用いて

$$x_C = P_{B \rightarrow C}^{-1}x_B \quad \text{or} \quad x_i^C = \sum_{j=1}^n p_{ij}^{-1} x_j^B \quad (5-5-12)$$

を得る。この式を**基底の変換に伴う座標変換**という。

$$\text{例) } (c_1 \ c_2) = (b_1 \ b_2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = 3b_1 + 2b_2 : x_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この座標変換を線形変換のときの座標値の変換(5-5-9)式と混同しない

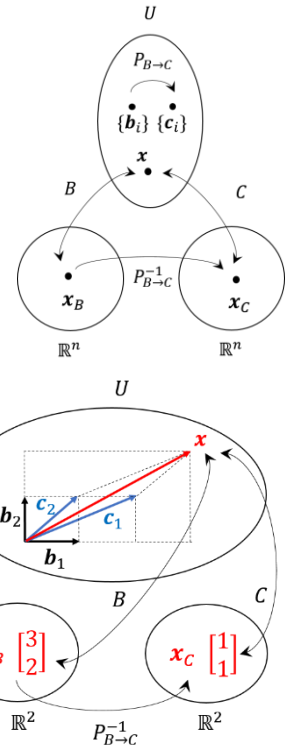
よう注意。線形変換の方は U 上のベクトル自体の変換を同じ基底に対

して表示した結果であるのに対し、座標変換は U 上のある同じベクトルの異なる基底に対する

(異なる $\mathbb{R}^n$ 上での) 表示間の変換 (つまり異なる座標系で同じモノを見た結果間の変換) という

根本的な違いがある。基底の変換により、ある同じベクトルの表示である列ベクトルが変換を受け

たように、ある同じ線形変換の表示行列も基底を変換すると変換される。詳しくみてみよう。



[5-5-6] 線形変換に対する基底の変換と表示行列の変換

n 次元ベクトル空間 U 上のベクトルの線形変換 $f: x \mapsto y = f(x)$

の2組の基底 $B = \{b_i\}, C = \{c_i\}$ に対する表示行列を F_B, F_C

基底の変換行列を $(c_1 \cdots c_n) = (b_1 \cdots b_n)P_{B \rightarrow C}$ としたとき変換後の

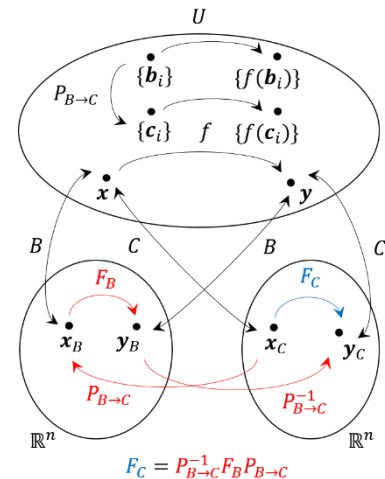
ベクトル $f(x)$ をそれぞれ表示する。基底と座標の変換を用いて

$$f(x) = (b_1 \cdots b_n)F_B x_B = (c_1 \cdots c_n)F_C x_C = (b_1 \cdots b_n)P_{B \rightarrow C}F_C x_C \\ = (b_1 \cdots b_n)P_{B \rightarrow C}F_C P_{B \rightarrow C}^{-1} x_B$$

と書いて、**表示行列の変換** $F_B = P_{B \rightarrow C}F_C P_{B \rightarrow C}^{-1}$ あるいは

$$F_C = P_{B \rightarrow C}^{-1}F_B P_{B \rightarrow C} \quad (5-5-13)$$

を得る。この関係は図からも読み取れる。



基底すなわち座標系は対象の系に対し最も都合の良いものを選ぶことができ、この表示行列の変換式により行列が単純になる基底があれば応用上重要となる。これは次講のテーマの一つとなる。

また (5-5-13) 式で両辺の行列式を求めると、 $|F_C| = |P_{B \rightarrow C}^{-1}F_B P_{B \rightarrow C}| = |P_{B \rightarrow C}^{-1}||F_B||P_{B \rightarrow C}|$ となるが

(5-3-6) より $|P_{B \rightarrow C}^{-1}| = 1/|P_{B \rightarrow C}|$ がいて、 $|F_C| = |F_B|$ となる。つまり行列式の値は**基底の取り方に依らず、表示元である線形変換 f に固有な量を表す重要な量**であることがわかる。

[5-5-7] 線形変換と座標変換 (Active と Passive)

線形変換による座標値の変換と、基底の変換による座標変換の形式的な類似を利用して、線形変換の結果に相当する座標変換を考えよう。[5-5-5]項より座標変換の変換行列は基底の変換行列の逆行列となるので、変換先の基底は実現したい線形変換 f の逆変換による変換先の組 $\{b'_i = f^{-1}(b_i)\}$ とする。そうすれば基底の変換行列は f の基底 B に対する表示行列 F_B の逆行列 F_B^{-1} となり

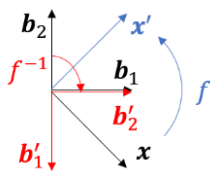
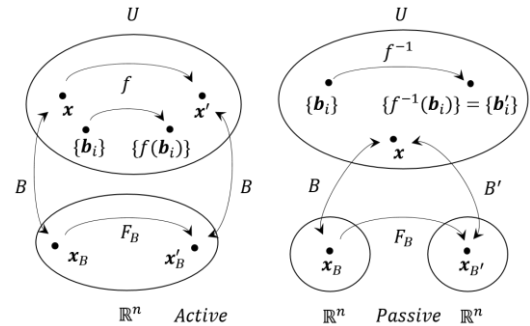
$$(b'_1 \cdots b'_n) = (b_1 \cdots b_n) F_B^{-1} \quad (5-5-14)$$

と書け、このときの座標変換は

$$x_{B'} = F_B x_B \quad (5-5-15)$$

と書けることになる。線形変換が実際にベクトルを変換するため **Active** な変換、基底の変換に伴う座標変換ではベクトル自体は実際には変換されないため

Passive な変換と区別することがある。混同しないよ



う改めて注意。例として左図の2次元の回転を考えよう。ベクトル x の線形変換 f による x' への $\frac{\pi}{2}$ 回転を基底 $\{b_1, b_2\}$ で表示すれば

$$x'_B = F_B x_B: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{Active}) \quad \text{となる。これを線形変換 } f \text{ の逆変換 } f^{-1} \text{ による基底変換 } (b'_1 \ b'_2) = (b_1 \ b_2) F_B^{-1} = (b_1 \ b_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (-b_2 \ b_1)$$

に伴う座標変換で表せば $x_{B'} = F_B x_B: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{Passive}) \quad \text{となる。混同しないこと！}$

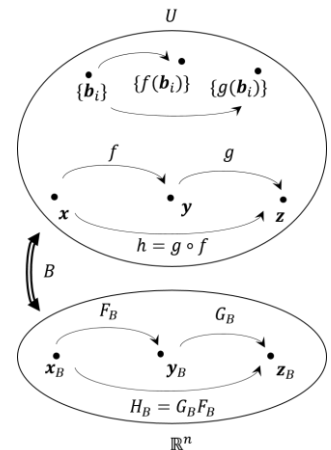
[5-5-8] 合成変換の行列による表示

n 次元ベクトル空間 U 上のベクトルの線形変換 $f: x \mapsto y = f(x)$, $g: y \mapsto z = g(y)$ の基底 $B = \{b_i\}$ に対する行列表示が F_B, G_B のとき、合成変換 $h = g \circ f$ の表示行列 H_B を F_B, G_B で表そう。

$g \circ f: x \mapsto z = g(f(x))$ において $(b_1 \cdots b_n) y_B = (b_1 \cdots b_n) F_B x_B$ より $y_B = F_B x_B$ が言えて、これを $(b_1 \cdots b_n) z_B = (b_1 \cdots b_n) G_B y_B$ に代入して $(b_1 \cdots b_n) z_B = (g \circ f)(x) = (b_1 \cdots b_n) G_B F_B x_B$ となり以下を得る。

$$z_B = H_B x_B, \quad H_B = G_B F_B \quad (5-5-16)$$

このように合成変換の同じ基底に対する表示行列は、各変換の表示行列の変換順での積となる。



このとき、合成される2回目以降の変換について注意が必要で、本講第2節の図5-2-5のように「回転」と続く「せん断」の合成変換の場合、せん断変換で平行にずらされる方向は回転しても変わらず横 (x_1 軸) 方向のままになっている（実際に図を見て欲しい）。一方で「せん断」が先でその後「回転」の場合（図5-2-6）は、せん断で横方向にずらされた状態で全体が回転される。この後者の合成変換（変換順が逆）の結果は、前者の合成変換でせん断のずらされる方向が回転後の軸とした場合とも解釈できるがこのことは偶然だろうか？2回目以降の変換において、変換固有の向き（例えば3次元回転の回転軸なども考えられる）を1回目の変換に伴い変えさせたい場合はどう

すればよいのだろうか？ 実現したい変換は図のように 2 回目の変換 g を 1 回目の変換 f の逆変換後の基底として見た変換と考えることができるので、Passive 変換により行うのが自然ともいえる。1 回目・2 回目の基底変換に伴う座標変換は

$(b'_1 \cdots b'_n) = (b_1 \cdots b_n)F_B^{-1}$, $x_{B'} = F_B x_B$ と $(b''_1 \cdots b''_n) = (b'_1 \cdots b'_n)G_{B'}^{-1}$, $x_{B''} = G_{B'} x_{B'}$ と書け、このときの $G_{B'}$ は基底 B' による表示すなわち 1 回目の基底変換に伴う行

列の変換であり (5-5-13) 式で $P_{B \rightarrow C} = F_B^{-1}$ にあたる $G_{B'} = F_B G_B F_B^{-1}$ となる。これにより以下の合成変換を得る。

$$x_{B''} = H_B x_B, \quad H_B = G_{B'} F_B \quad (G_{B'} = F_B G_B F_B^{-1}) \quad (5-5-17)$$

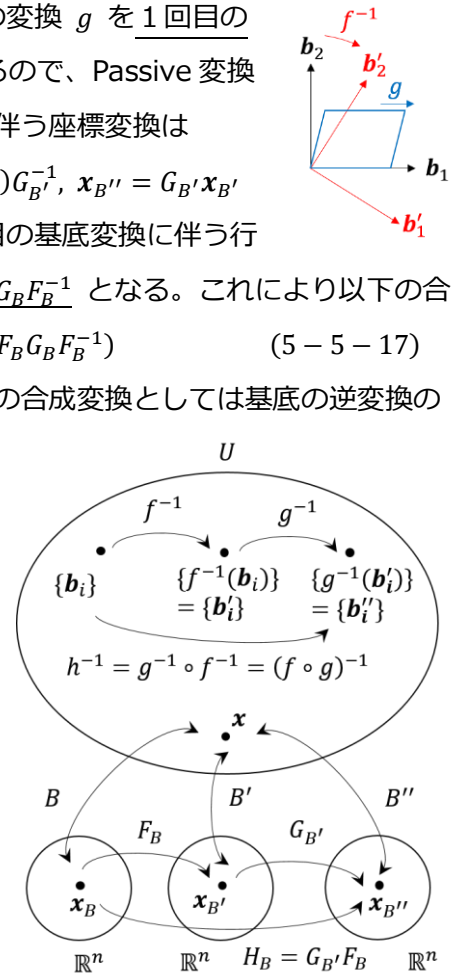
このとき基底の変換は実現したい座標変換の逆変換なので、その合成変換としては基底の逆変換の合成 $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ なる変換となり、相当する

線形変換(Active)は $h = f \circ g$ と変換の順序が逆なので、その

表示行列は $F_B G_B$ となることに注意を要する。このことは

(5-5-13) 式にあたる行列の変換式 $G_{B'} = F_B G_B F_B^{-1}$ より

$G_{B'} F_B = F_B G_B$ が言えることからわかる。先に考察した線形変換での回転とせん断の合成変換での変換順を逆にした結果と解釈できた「からくり」が理解できただろうか。もっと具体例等を知りたい人は 第 7 講 回転の表現 I 第 2・3 節で 3 次元の回転にこの方法を応用するのでそちらも参照して頂きたい。



【5-6】[▼C]付録 1 : Levi-Civita 記号の積の性質

宿題となっていた第 3 講 (3-7-5) 式である $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$ の導出を行う。

3 次元の列ベクトルの組 a, b, c および x, y, z が成す 3 次正方行列の行列式において、転置行列の行列式は元の行列式と等しいこと、行列の積の行列式は行列式の積に等しいことにより

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot x & a \cdot y & a \cdot z \\ b \cdot x & b \cdot y & b \cdot z \\ c \cdot x & c \cdot y & c \cdot z \end{vmatrix} \quad (5-6-1)$$

が成り立つ。ここで標準基底 $\{e_i\}$ において $D(e_i, e_j, e_k) = \varepsilon_{ijk}$ と上式より、以下が成り立つ。

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = D(e_i, e_j, e_k) D(e_l, e_m, e_n) = \begin{vmatrix} e_i \cdot e_l & e_i \cdot e_m & e_i \cdot e_n \\ e_j \cdot e_l & e_j \cdot e_m & e_j \cdot e_n \\ e_k \cdot e_l & e_k \cdot e_m & e_k \cdot e_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (5-6-2)$$

$$= \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (5-6-3)$$

(5-6-3) 式において $l = i$ として和をとると、以下のように求める式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \sum_{i=1}^3 (\delta_{ii} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ki} + \delta_{in} \delta_{ji} \delta_{km} - \delta_{ii} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{ki}) \\ &= 3\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kn} - 3\delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jm} \delta_{kn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

なお、(5-6-2) 式はその導き方により n 次においても同様に成り立つことがわかる。

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \cdots & \delta_{i_1 j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \cdots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix} \quad (5-6-4)$$

【5-7】付録 2：複素数の行列による表現

2 次の回転行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ において $\theta = \pi/2$ とした行列 $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して、単位行列 E との線形結合である行列 $Z = xE + yI$ ($x, y \in \mathbb{R}$) を考えよう (以下登場人物は全員が実数)。

$Z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ であり、 $Z = 0$ となるのは $x = y = 0$ のときのみで E と I は線形独立となる。

$$Z_1 = x_1 E + y_1 I, \quad Z_2 = x_2 E + y_2 I$$

とすると、和は

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2)E + (y_1 + y_2)I$$

となり、積は $E^2 = E$, $IE = I$, $EI = I$, $I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$ より

$$Z_1 Z_2 = (x_1 E + y_1 I)(x_2 E + y_2 I) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)E + (x_1 y_2 + y_1 x_2)I = Z_2 Z_1$$

となる。また

$$E^T = E, \quad I^T = -I \quad \text{および} \quad Z^T = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = xE^T + yI^T = xE - yI$$

となり、 $ZZ^T = (x^2 + y^2)E = Z^T Z$ となるので

$$\|Z\|^2 E = ZZ^T \quad (\|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

として自然なノルム $\|Z\|$ ($\|Z\| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$) が定義できる。よって $Z \neq 0$ のとき

$$Z \left(\frac{1}{\|Z\|^2} Z^T \right) = \left(\frac{1}{\|Z\|^2} Z^T \right) Z = E$$

となり 逆元

$$Z^{-1} = \frac{1}{\|Z\|^2} Z^T$$

が定まる (実際、行列式 $|Z| = x^2 + y^2 = \|Z\|^2$ 、余因子行列 $\tilde{Z} = Z^T$ より確かに逆行列となる)。

また $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ と書け、ノルムの定義から $Z = \|Z\|(\cos \theta E + \sin \theta I) =$

$\|Z\| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ となり、大きさ 1 の Z を掛けることは θ 回転させることに相当する。

(つまり Z はノルムで正規化すると回転行列となる)。

というわけで、対比表としてまとめると

	基底/元	共役	和	積	ノルム	逆元	極形式
複 素 数	$1, i$ $z = x + iy$	$\bar{i} = -i$ $\bar{z} = x - iy$	$z_1 + z_2$ $= (x_1 + x_2)$ $+ i(y_1 + y_2)$	$1^2 = 1$ $1i = i$ $i1 = i$ $i^2 = -1$	$ z ^2 = z\bar{z}$ $ z $ $= \sqrt{x^2 + y^2}$ $(z = 0$ $\Leftrightarrow z = 0)$	z^{-1} $= \frac{1}{ z ^2} \bar{z}$ $(z \neq 0)$	z $= z (\cos \theta$ $+ i \sin \theta)$
行 列 表 現	E, I Z $= xE + yI$	$I^T = -I$ Z^T $= xE - yI$	$Z_1 + Z_2$ $= (x_1 + x_2)E$ $+ (y_1 + y_2)I$	$E^2 = E$ $EI = I$ $IE = I$ $I^2 = -E$	$\ Z\ ^2 E = ZZ^T$ $\ Z\ $ $= \sqrt{x^2 + y^2}$ $(\ Z\ = 0$ $\Leftrightarrow Z = 0)$	Z^{-1} $= \frac{1}{\ Z\ ^2} Z^T$ $(Z \neq 0)$	Z $= \ Z\ (\cos \theta E$ $+ \sin \theta I)$

表 5-6-1

つまり、 $Z = xE + yI$ は E, I を実数/虚数単位、転置を共役とみなすことで、複素数 $z = x + iy$ と同一視できることになる。おもしろいよね。(次講の付録で、もう一列追加されます・・・)

【第6講】行列 III：固有値・対角化

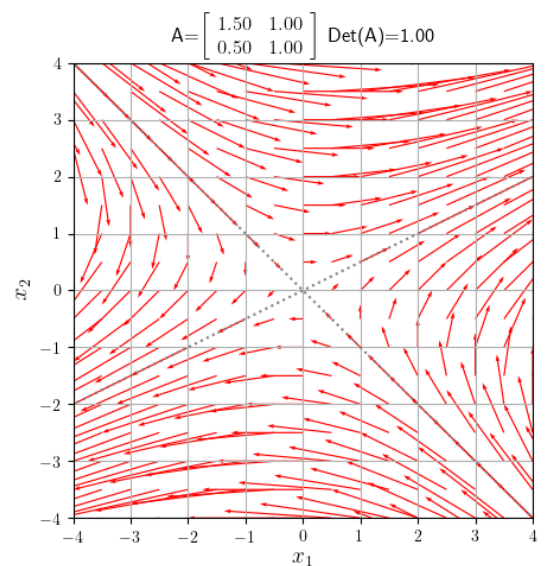
【6-1】はじめに

前講では線形変換を表す行列についてみてきた。ベクトル空間の各点は線形変換により別の点に写されるが、その写り方を点の「向きの流れ」として可視化して見てみることで、変換を示す行列によっては各点の写り方が原点を通るある軸に沿って「流れ」ていることがわかり、その行列に固有な特徴を示しているとみることができる。さらに n 次の行列に対し n 本の線形独立な上記の軸が得られる場合は、基底をその軸の組に変換することで変換された表示行列が単純な形になるという、理工系の諸分野で応用上重要となる性質を学ぶ。また最後の節で簡単な応用事例をいくつかみてみよう。

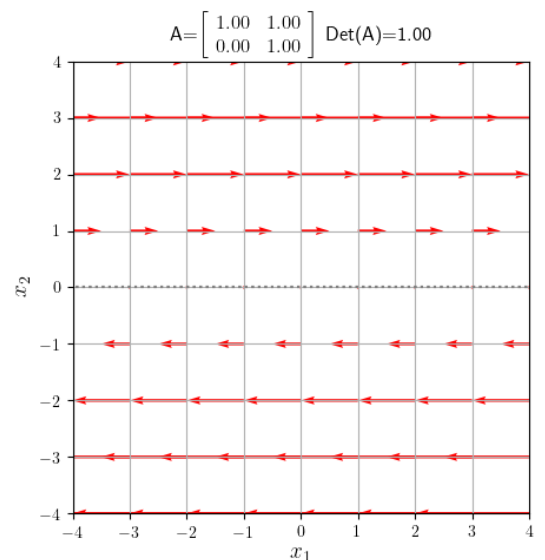
【6-2】固有ベクトルと固有値

【6-2-1】線形変換の点の「向きの流れ」

右図は2次の線形変換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ において各点 (x_1, x_2) の変換先を表すベクトルを（そのままでは図が見づらくなるので縮めて）描くことで、変換による点の動きの「向きの流れ」を可視化したものである。観察するとおおまかな流れとしては、左上・右下から原点を通る直線（ $x_2 = -x_1$ ：図の点線）に沿って入ってきて原点を通る右上がりの直線（ $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ ：図の点線）に突き当たり、その直線に沿って右上・左下に流れ出るような振る舞いをしていることがわかる。



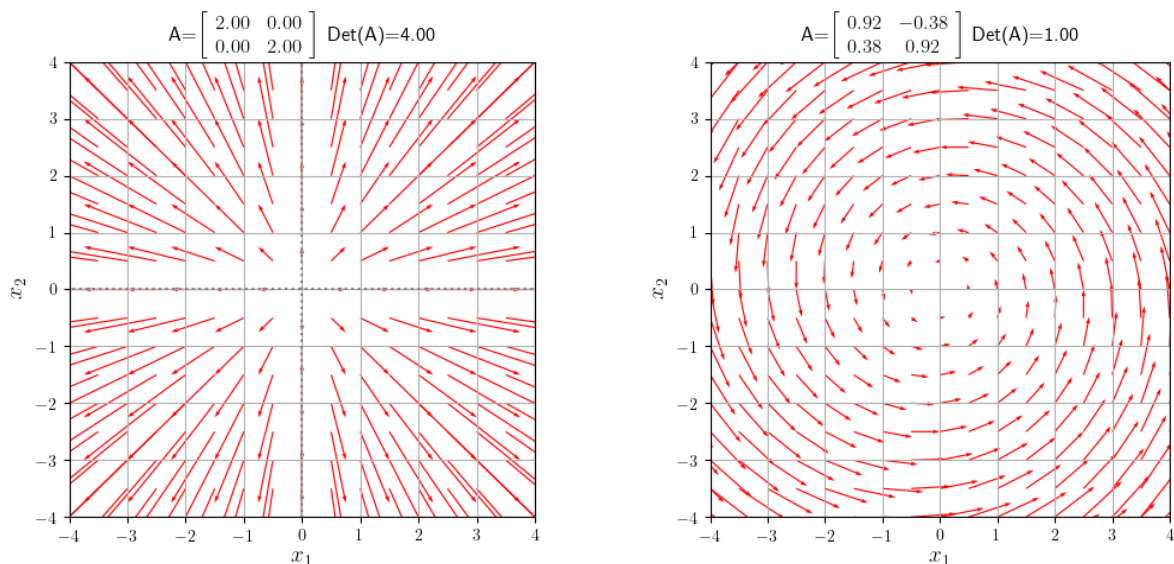
下の図は別の例として せん断を表す行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合であり、原点を通る横軸（図の点線）に平行に流れ、横軸を境に上半分は右側に下半分は左側に流れている。この横軸上の点以外の全ての点は横に移動するので、原点を通る向きを変えない直線は、この横軸のみとなる。



上記いずれの例の場合も流れを分ける軸（図の点線）
上の点は、原点からの向きを変えない変換を受けていることになる。

あと2つ別の例をあげよう。

【第6講】行列 III : 固有値・対角化



左図は行列が $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ の例で、この場合は特殊であり、原点を通る全ての直線は向きを変えない変換を受けることになる。従って該当する直線は無数にあるが、それらが2次元空間をなすので、線形独立な2本の直線を代表として図には点線で示している。

また右図は行列が $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ である回転行列の $\theta = \pi/8$ の場合で、これも特殊で回転なので原点を通る全ての直線が向きを変える変換を受けることになる。従って「向きを変えない」に該当する直線は存在しない。これらの例を踏まえて考察してみよう。

【6-2-2】固有ベクトル・固有値と固有方程式

一般に原点を通る直線はその向きを表すベクトル $\mathbf{b}$ のスカラー積 $k\mathbf{b}$ として表され、線形変換 $\mathbf{c} = A\mathbf{b}$ により原点を通る直線 $k\mathbf{c}$ に写される。従って一般的には原点を通る直線はその向きを変えることになるが、前項の2次の例でみたように変換によってはその向きが変わらない直線も存在する。この場合その直線上の点 $(k\mathbf{b})$ は一般に同じ直線上の別の点 $(k\mathbf{b}$ に平行な $k\mathbf{c})$ に写されることになるが、原点からの距離として直線上の変位を考えるとその比率 $\left(\frac{\|k\mathbf{c}\|}{\|k\mathbf{b}\|}\right)$ は一定 $\left(\frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right)$ となる。この変換により不変となる「向き」と、その向きにおける変位（伸び・縮み）の「比率」は、その線形変換を特徴づけるものと考えられる。不変となる「向き」を表すベクトルを**固有ベクトル**といい、固有ベクトル上の点の変位の「比率」を**固有値**という。このことを定式化しよう。

n 次の線形変換の表示行列を A 、固有ベクトルを示す列ベクトルを $\mathbf{u}$ 、固有値を λ とする。

$A\mathbf{u}$ として変換された $\mathbf{u}$ は、向きが変わらず長さの比が一定である λ 倍となるので、

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (6-2-1)$$

を満たす。この式は自明な解 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ を持つが、これはどのような A や λ であっても成り立ち

何らの特徴を示すものでもないので、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ は固有ベクトルではないとしよう。式変形をして

$$(A - \lambda E)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6-2-2)$$

において $A' = A - \lambda E$ とすればこの式は $A'\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となる。もし A' が正則であれば自明な解

$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のみを得て固有ベクトルは存在しないことになるので、 A' が正則でない：つまりその行列式の値が 0 となることから、固有ベクトルが存在するための λ に対する必要条件となる。よって

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (6-2-3)$$

という式を考えることになる。この式を**固有方程式**（あるいは特性方程式）という。また左辺の行列式を展開すると λ についての n 次多項式となり、この $g(\lambda) = |A - \lambda E|$ を**固有多項式**という。
($g(\lambda) = |\lambda E - A|$ と定義する場合も多い。次数により全体の符号が異なるだけでどちらでもよい。)

固有方程式は λ についての n 次方程式となり、その解である固有値それぞれに対して (6-2-2) 式を満たす $\mathbf{u}$ を求めることになるが、この連立一次方程式である (6-2-2) 式はその行列式が 0 であり $\mathbf{u}$ は一意に定まらず不定解となることに注意。そもそもこれは (6-2-1) 式で解 $\mathbf{u}$ を定数倍してもまた解となることに起因しており、 $\mathbf{u}$ はその向きにのみ意味があり大きさは不定となるからである。これ以上の考察は後回しとして、まずは前項の例について実際に解いてみよう。

○例 1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ の場合：

固有方程式： $\begin{vmatrix} 3/2 - \lambda & 1 \\ 1/2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ を展開、整理して $\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$ より $\lambda = 2, \frac{1}{2}$ を得る。

(i) $\lambda = 2$ のとき (6-2-2) 式は

$$\begin{bmatrix} 3/2 - 2 & 1 \\ 1/2 & 1 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ となる。 } \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & | & 0 \\ 1/2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_2 + r_1 \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_1 \times (-2) \text{ より } \begin{cases} u_1 = 2s \\ u_2 = s \end{cases} (\forall s \in \mathbb{R}) \text{ となり } \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を得る。}$$

(ii) $\lambda = 1/2$ のとき

$$\begin{bmatrix} 3/2 - 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 - 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ となる。 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1/2 & 1/2 & | & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_2 - r_1/2 \text{ より } \begin{cases} u_1 = -t \\ u_2 = t \end{cases} (\forall t \in \mathbb{R}) \text{ となり } \mathbf{u} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を得る。}$$

(6-2-1) 式は、 $\begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} (s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) = s \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix})$ および $\begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} (t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = t \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 1/2(t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$ として確かに満たされる。なおこの式は $\begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} (s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2(s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) + 1/2(t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$ と、まとめて書ける。また図を改めてみると、固有ベクトル $s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 上の点は 2 倍されて原点から遠ざかり、 $t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 上の点は 1/2 倍されて原点方向に近づくことが読み取れる。

○例 2) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合：

固有方程式： $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ を展開して $(\lambda - 1)^2 = 0$ より $\lambda = 1$ (重解) を得る。

$\lambda = 1$ (重解) のとき (6-2-2) 式は

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より } u_2 = 0 \text{ となり、 } \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\forall s \in \mathbb{R}) \text{ を得る。}$$

(6-2-1) 式は、 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1(s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$ として確かに満たされる。また図を改めてみると、固有ベクトル $s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 上の点は変換後も同じ座標値をとり、変換で不変な直線となることが読み取れる。

【第6講】行列 III : 固有値・対角化

○例3) 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ の場合 :

固有方程式 : $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を展開して $(\lambda-2)^2 = 0$ より $\lambda = 2$ (重解) を得る。

$\lambda = 2$ (重解) のとき (6-2-2) 式は

$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は 任意の u_1, u_2 で成り立つ特殊な場合であるが、

$\mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($\forall s, t \in \mathbb{R}$) として解を表すことができる。解の自由度は2であり、解を表す2本のベクトルは線形独立であれば、その選び方は自由であることに注意。

(6-2-1) 式は、 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} (s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2(s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ として確かに満たされる。また図を改めてみると、全ての直線が向きを変えずに2倍されていることが読み取れる。

○例4) 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ の場合 :

固有方程式 : $\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$ を展開、整理して $\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$ となる。

判別式 $D = \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta$ よりこの2次方程式は $\theta \neq n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) で実数解を持たない。

実際、回転行列なので図の解釈でも述べたように原点を通る全ての直線は回転させられ、向きを保つ直線は存在しないという観察と一致する。が、2次方程式で簡単に解けるし、 $\theta \neq n\pi$ つまり $\sin \theta \neq 0$ として進めるところまで進んでみよう。解としては、 $\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta$ を得る。

(i) $\lambda = \cos \theta + i \sin \theta$ のとき (6-2-2) 式は

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - (\cos \theta + i \sin \theta) & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - (\cos \theta + i \sin \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ = \sin \theta \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ となる。 } u_1 = i u_2 \text{ となり } \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall s \in \mathbb{C}) \text{ を得る。}$$

(ii) $\lambda = \cos \theta - i \sin \theta$ のとき

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - (\cos \theta - i \sin \theta) & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - (\cos \theta - i \sin \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ = \sin \theta \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ となる。 } u_1 = -i u_2 \text{ となり } \mathbf{u} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{C}) \text{ を得る。}$$

(スカラー値として複素数をとるので、パラメータ s, t は複素数となる。)

$$\begin{aligned} \text{(6-2-1) 式は、} & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} (s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}) = s \begin{bmatrix} i \cos \theta - \sin \theta \\ i \sin \theta + \cos \theta \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -i \cos \theta - \sin \theta \\ -i \sin \theta + \cos \theta \end{bmatrix} \\ & = (\cos \theta + i \sin \theta) s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + (\cos \theta - i \sin \theta) t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ として式の上では確かに成り立つ。} \end{aligned}$$

この例4)のように、実正方行列であっても固有値の解が複素数となる場合がある。第1講 イントロダクションで触れた「代数学の基本定理」として、n次の代数方程式に対し(重複解の場合はその重複数も含めて)複素数の範囲でn個の解が存在することが知られている。従って固有値・固有ベクトルを考える際は、解となる固有値や固有ベクトルの成分を複素数まで範囲を広げた方がよさそうだ。ベクトルや行列は、内積や関連して転置が絡むときに実数と複素数との違いが出てくる。概要は付録1で述べるが、しばらくは上記程度の拡張で済む。

もう少し複雑な例として、3 次の行列の例をみてみよう。

○例 5) 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の場合： 固有方程式： $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ を余因子展開して

$(-\lambda)(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda) = 0$ となり、これを因数分解して $(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$ より $\lambda = 2$ と $\lambda = -1$ (重解) を得る。

(i) $\lambda = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ を解く。} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} r_1 \leftrightarrow r_3 \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} r_2 - r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_3 + r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_2 \times (-\frac{1}{3}) \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_1 - r_2 \text{ より } \begin{cases} u_1 = r \\ u_2 = r \\ u_3 = r \end{cases} (\forall r \in \mathbb{R}) \text{ となり、} \mathbf{u} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を得る。} \end{aligned}$$

(ii) $\lambda = -1$ (重解) のとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ を解く。} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} r_2 - r_1 \text{ より } \begin{cases} u_1 = -s - t \\ u_2 = s \\ u_3 = t \end{cases} (\forall s, t \in \mathbb{R}) \\ \text{となり } \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を得る。線形独立な } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ の線形結合の組 (例: } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{)} \end{aligned}$$

の任意の線形結合もまた解であり (確認しよう)、例 3) と同様に解の自由度は 2 で 同じ解空間

(2 次元) を張る 2 本の固有ベクトルは自由に選ぶことに注意が必要となる。

(6-2-1) 式は、以下のように確かに満たされる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(r \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = 2 \left(r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - 1 \left(s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

ここまでのまとめ：n 次の行列に対する固有方程式は、複素数の範囲まで広げれば重複度を含めて n 個の解としての固有値を持つ。各固有値に対する固有ベクトルを (6-2-2) 式を解いて求めるが、その数は解の自由度すなわち $n - \text{rank}(A - \lambda E)$ だけ得ることになる。固有方程式の解を用いるため必然的に $\text{rank}(A - \lambda E) < n$ となり、相異なる固有値はそれぞれ少なくとも 1 つ固有ベクトルを得る。従って どんな行列であっても少なくとも 1 つ固有値と固有ベクトルの組が存在する。

行列 A の固有値と固有ベクトルが、 $(\lambda_1, \mathbf{u}_1), (\lambda_2, \mathbf{u}_2), \dots, (\lambda_m, \mathbf{u}_m)$ と求まったとしよう。このとき固有ベクトルの任意の線形結合 $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_m \mathbf{u}_m$ に対する線形変換 $A\mathbf{x}$ は、

$$A\mathbf{x} = c_1 A\mathbf{u}_1 + c_2 A\mathbf{u}_2 + \dots + c_m A\mathbf{u}_m = c_1 \lambda_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_m \lambda_m \mathbf{u}_m$$

つまり行列との積をとらずとも固有ベクトルごとの固有値倍として求まることになる。もし固有ベクトルが n 次の行列に対して n 本求まり、かつそれらが線形独立であった場合は、n 次元ベクトル空間の全てのベクトルの線形変換が同様に簡単に求まることになる。それならいっそのこと、基底をその線形独立な固有ベクトルの組に変換してみたらどうか？ というのが次節のテーマとなる。

【6-3】行列の対角化

【6-3-1】線形独立な固有ベクトルへの基底の変換

前節の最後で述べた「 n 次正方行列に対し固有ベクトルが n 本存在して、それらが線形独立な場合には、基底をその組に変換したらどうか？」を考察してみよう。

仮定より n 次正方行列 A の固有値・固有ベクトルの組が $(\lambda_1, \mathbf{u}_1), \dots, (\lambda_n, \mathbf{u}_n)$ として求まり、各固有ベクトルの解の自由度のパラメータを適当に選んだ組を改めて $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ とする。今変換元の基底は $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ の列ベクトルの組である標準基底であり、新たな基底も同じ $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ の列ベクトルである固有ベクトルの組なので、それぞれの基底は列ベクトルを並べたものとして

$[\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]$ および $[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ と書いて、(5-5-11)のように基底の変換行列 $P_{E \rightarrow U}$ は $[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n] = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n] P_{E \rightarrow U}$ として定まる。今 $[\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]$ は $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ の標準基底なので $[\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n] = E$ より

$$P_{E \rightarrow U} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n] \quad (6-3-1)$$

となる。また固有ベクトルの組は仮定により線形独立なので $P_{E \rightarrow U}$ は正則となり、その逆行列 $P_{E \rightarrow U}^{-1}$ が存在する。このとき行列 A は、(5-5-13)のように この基底の変換に伴う変換を受け

$$\begin{aligned} A_U &= P_{E \rightarrow U}^{-1} A P_{E \rightarrow U} = P_{E \rightarrow U}^{-1} A [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n] = P_{E \rightarrow U}^{-1} [A \mathbf{u}_1 \cdots A \mathbf{u}_n] = P_{E \rightarrow U}^{-1} [\lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdots \lambda_n \mathbf{u}_n] \\ &= P_{E \rightarrow U}^{-1} [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = P_{E \rightarrow U}^{-1} P_{E \rightarrow U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-3-2)$$

と、各固有値を対角成分に持つ対角行列に変換されることになる。このことを行列の対角化という。ちなみに新しい基底となる各固有ベクトル自身は、 $P_{E \rightarrow U}^{-1} \mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$ と変換の結果標準基底とみなされることになる。すなわち対角化後の世界は固有ベクトルが各直交座標軸となり、座標軸ごとに伸縮される比率が固有値で定まるという、表示している線形変換を最もシンプルに表すこととなる。逆に言えば、対角化可能な表示行列で表される線形変換の特徴は本来各固有値のみで決まり、そこからの自由な基底の変換の結果として複雑な表示となっているとみることもできる。各固有ベクトルを求めることは、対角化されていた世界での標準基底（座標軸）を探していることになる。

前節での例に対して実際に確かめてみよう。

○例1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ の場合：固有値は $\lambda = 2, 1/2$ となり固有ベクトルは $\forall s, t \in \mathbb{R}$ として $\lambda_1 = 2$ のとき $\mathbf{u}_1 = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1/2$ のとき $\mathbf{u}_2 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、これらは線形独立である。変換先の基底を $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると、基底の変換行列は $P_{E \rightarrow U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ となる。逆行列 $P_{E \rightarrow U}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルの組を基底とした変換先の表示行列は、

$$A_U = P_{E \rightarrow U}^{-1} A P_{E \rightarrow U} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
となり、確かに対角化された。

○例2) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合：固有値は $\lambda = 1$ (重解) となり固有ベクトルは $\forall s \in \mathbb{R}$ として $\lambda_1 = 1$ のとき $\mathbf{u}_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のみであり、基底と成りえない。よってこの例は対象外となる。

○例 3) 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ の場合 : 固有値は $\lambda = 2$ (重解) となり固有ベクトルは $\forall s, t \in \mathbb{R}$ として $\lambda_1 = 2$ のとき $\mathbf{u}_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、これらは線形独立であるが既に固有ベクトルとして標準基底を選べているので、基底を変換しても変わらない。実際、行列 A はもともと対角行列であり対角成分は確かに固有値である。

○例 4) 行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ の場合 : 固有値は $\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta$ となり固有ベクトルは $\forall s, t \in \mathbb{C}$ として $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ のとき $\mathbf{u}_1 = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$ のとき $\mathbf{u}_2 = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、これらは線形独立である。変換先の基底を $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると、基底の変換行列は $P_{E \rightarrow U} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ となる。逆行列 $P_{E \rightarrow U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルの組を基底とした変換先の表示行列は、

$$\begin{aligned} A_U &= P_{E \rightarrow U}^{-1} A P_{E \rightarrow U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \cos \theta - \sin \theta & -i \cos \theta - \sin \theta \\ i \sin \theta + \cos \theta & -i \sin \theta + \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta + i \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta - i \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、確かに対角化された。

○例 5) 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の場合 : 固有値は $\lambda = 2, -1$ (重解) となり固有ベクトルは $\forall r, s, t \in \mathbb{R}$

として $\lambda_1 = 2$ のとき $\mathbf{u}_1 = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -1$ のとき $\mathbf{u}_2 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、これらは線

形独立である。変換先の基底を $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると、基底の変換行列は

$P_{E \rightarrow U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる。逆行列 $P_{E \rightarrow U}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ より固有ベクトルの組を基底と

した変換先の表示行列は、

$$A_U = P_{E \rightarrow U}^{-1} A P_{E \rightarrow U} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ となり、確かに対角化された。なお重解 } \lambda = -1 \text{ に属する固有ベ}$$

クトル $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ は線形独立で同じ解空間を張るならば、選び方は自由であったことに再度注意。

[6-3-2] 対角化可能な条件

さて「固有ベクトルが n 本求まり、その組が線形独立であること (つまり基底となり得ること)」これはどの程度の制限となるのだろうか? 少なくとも上記の例 2) はこの条件を満たさなかった。これについて固有値・固有ベクトルに関し以下の性質が知られている。

- 互いに相異なる固有値に属する固有ベクトルの組は線形独立となる (6-3-3)

(※証明は付録 2 にて)

【第6講】行列 III : 固有値・対角化

これでわかることとして、少なくとも n 次の行列の固有方程式が重複解を持たない場合は、 n 個の相異なる固有値に属する n 本の固有ベクトルが存在し、その組は線形独立となるのでその行列は対角化可能ということになる。また固有方程式が重複解を持つ場合は、重複解となる固有値がそれぞれその重複度の数だけ線形独立な固有ベクトルを持てば合計 n 本の固有ベクトルが線形独立となり（厳密には要証明）、対角化可能となる。具体例として例2と例3例5の違いを参照。

[6-3-3] 相似変換

一般に正則な行列 P により正方行列 A を $B = P^{-1}AP$ として変換することを**相似変換** といい、相似変換にて変換される行列を互いに**相似**であるという。行列の対角化のときと異なり相似変換の変換行列に求められる条件は単に正則であるというだけで、対角化の変換よりもずっと一般的な任意の基底の変換に伴う行列の変換と解釈できることになる。

●相似な行列は以下の共通点を持つ

(i) 行列式が等しい (6-3-4)

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|} |A||P| = |A| \quad \blacksquare$$

(ii) 固有多項式が等しい (6-3-5)

$$|B - \lambda E| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}||A - \lambda E||P| = |A - \lambda E| \quad \blacksquare$$

(iii) 同じ固有値を持つ (6-3-6)

(ii) より明らか

これにより行列式の値や固有値は、基底に依らない各線形変換固有の値ということがわかる。

[6-3-4] 行列の三角化

成分 $a_{ij} = 0$ ($i > j$) となる行列を（上）三角行列というのだった。以下のことが知られている。

●任意の正方行列 A に対しある正則行列 P が存在し、三角行列 Γ に $\Gamma = P^{-1}AP$ と

相似変換することができる。 (6-3-7)

このことを**行列の三角化**という。（※証明は付録2にて）

● n 次の三角行列の対角成分は三角行列の n 個の固有値が並んだものとなる (6-3-8)

三角行列の非ゼロ成分を γ_{ij} とすると (4-3-16)式より
$$|\Gamma - \lambda E| = \begin{vmatrix} \gamma_{11} - \lambda & \cdots & \gamma_{1n} \\ \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & \gamma_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (\gamma_{11} - \lambda) \cdots (\gamma_{nn} - \lambda)$$
 よって固有方程式の解は三角行列の各対角成分となり、題意は示された。■

● n 次正方行列 A を三角化すると、対角成分に A の n 個の固有値が並ぶ (6-3-9)

三角化は相似変換にて行われ、(6-3-6)、(6-3-8) より成り立つ。 ■

従って対角化と同様に三角化された三角行列の対角成分は三角化される前の行列の固有値となる。

[6-3-5] 固有値の諸性質

●行列式との関係

○ n 次正方行列 A の n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ (6-3-10)

(6-3-4), (6-3-9) および 三角行列の行列式は対角成分の積より成り立つ。 ■

●トレース

○ 定義 : 正方行列 A の対角成分の総和を **トレース** (跡) といい、 $\text{tr}(A)$ と記す

○ 性質 : (i) $\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B)$ (6-3-11)

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_i (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_i a_{ii} + \beta \sum_i b_{ii} = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B) \quad \blacksquare$$

(ii) $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ (6-3-12)

$$\text{tr}(A^T) = \sum_i a_{ii}^T = \sum_i a_{ii} = \text{tr}(A) \quad \blacksquare$$

(iii) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ (6-3-13)

$$\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \text{tr}(BA) \quad \blacksquare$$

(iv) $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ (6-3-14)

$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A) \quad \blacksquare$$

(v) $\text{tr}(A) = (A \text{ の固有値の総和})$ (6-3-15)

Γ を $\Gamma = P^{-1}AP$ と三角化された行列とすると $\text{tr}(A) = \text{tr}(\Gamma)$ であり、

A の全ての固有値は三角化により対角成分に並ぶため題意は示された。 ■

上記性質(iv), (v) より トレースは基底に依らない固有の値 : 固有値の総和 となることがわかる。

● 2 次・3 次の固有多項式の係数および固有方程式の解と係数の関係

固有方程式の解を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすれば 固有多項式 $g(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = 0$ となる。そこで

○ 2 次 : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$ より
 $g(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ (6-3-16)

一方で $g(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$ という解と係数の関係がある。

○ 3 次 : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とすると $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} +$
 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$ このような分解を続け、 λ の 3 次、2 次、1 次、0 次の行列式に分ければ
 $g(\lambda) = -\{\lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)\lambda - \det(A)\}$
 $= -\{\lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \tilde{a}_{33})\lambda - \det(A)\}$ (6-3-17)
 $(\lambda \text{ の 1 次の項の係数は主小行列式の総和となる})$

一方で $g(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = -\{\lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$

n 次の場合、固有多項式は $g(\lambda) = (-1)^n\{\lambda^n - \text{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)\}$ という式となる。

【第6講】行列 III : 固有値・対角化

●行列の多項式

対角行列 $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}$ の累乗は容易に分かるように $D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$

と簡単に求めることができる。同様に三角行列 $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$ の累乗も、 $\Gamma^k = \begin{bmatrix} \gamma_1^k & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \gamma_n^k \end{bmatrix}$ となることは簡単に確かめることができる（実際に確認のこと！）。

任意の正方行列 A は少なくとも三角化可能であり、三角化された行列を Γ その際の変換行列を P とすると $\Gamma = P^{-1}AP$ なので、 $\Gamma^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$ と書け、 k 乗の場合も同様に $\Gamma^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ となる。よって A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると、

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{対角化可能なら} \quad A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad (6-3-18)$$

と書けることがわかる。

n 次正方行列の多項式を考える。具体的には、

$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 E \quad (6-3-19)$$

これも同様に $P^{-1}f(A)P = a_k P^{-1}A^k P + \dots + a_1 P^{-1}AP + a_0 P^{-1}EP = a_k \Gamma^k + \dots + a_1 \Gamma + a_0 E$

$$= \begin{bmatrix} a_k \lambda_1^k + \dots + a_1 \lambda_1 + a_0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_k \lambda_n^k + \dots + a_1 \lambda_n + a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \text{より}$$

$$f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & f(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{対角化可能なら} \quad f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1} \quad (6-3-20)$$

と書けることがわかる。

【6-4】実対称行列の対角化

【6-4-1】実対称行列の固有値・固有ベクトル

●実対称行列の固有値は全て実数となる

(6-4-1)

(※証明は付録2にて：複素ベクトルの内積は付録1も参照)

また実固有値をもとに (6-2-2) 式で求める固有ベクトルも実数ベクトルとなることがわかる。

●相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する

(6-4-2)

実対称行列 A の固有値を λ_i それに属する固有ベクトルを $\mathbf{u}_i$ とすると

$$\lambda_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = (A\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_j = (A\mathbf{u}_i)^T \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T A^T \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T A \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot (A\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot (\lambda_j \mathbf{u}_j) = \lambda_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$$

より $(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ となり、 $\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ がいえて題意は示された。 ■

【6-4-2】グラム・シュミットの正規直交化法

対角化の話の前に、 m 本の線形独立なベクトルの組 $\{\mathbf{a}_i\}$ から m 本の互いに正規直交するベクトルの組 $\{\mathbf{e}_i\}$ を作る手法（グラム・シュミットの正規直交化法）を解説する。固有ベクトルの組が

ら直交行列を作る際などに利用される。まず 1 本めのベクトル a_1 を正規化して e_1 を得る。

$$\bigcirc e_1 = a_1 / \|a_1\| \quad (6-4-3)$$

これに a_2 を加えた e_1, a_2 から e_2 をどうすれば作れるのだろうか？ここは逆の発想で、正規直交基底となる e_1, e_2 で a_2 を表すと $a_2 = (e_1 \cdot a_2)e_1 + (e_2 \cdot a_2)e_2$ と書けるハズで、式変形すると $(e_2 \cdot a_2)e_2 = a_2 - (e_1 \cdot a_2)e_1$ となるが a_1, a_2 は線形独立なので e_2, a_2 は直交しない ($e_2 \cdot a_2 \neq 0$) ($\because$ 対偶が成り立つ) ため左辺は正規化できて e_2 が求まる。つまりこの左辺を e'_2 としたときの

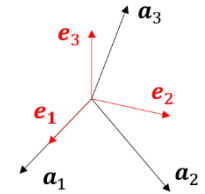
$$\bigcirc e'_2 = a_2 - (e_1 \cdot a_2)e_1 \rightarrow e_2 = e'_2 / \|e'_2\| \quad (6-4-4)$$

これに a_3 が加わったら？同様に $a_3 = (e_1 \cdot a_3)e_1 + (e_2 \cdot a_3)e_2 + (e_3 \cdot a_3)e_3$

より $e'_3 = (e_3 \cdot a_3)e_3$ として求める。(同様に a_1, a_2, a_3 は線形独立なので $e_3 \cdot a_3 \neq 0$ であることが、対偶が成り立つことからいえる。)

$$\bigcirc e'_3 = a_3 - (e_1 \cdot a_3)e_1 - (e_2 \cdot a_3)e_2 \rightarrow e_3 = e'_3 / \|e'_3\| \quad (6-4-5)$$

あとは必要な次数 m まで繰り返せばよい。



[6-4-3] 実対称行列の対角化

●実対称行列は直交行列を変換行列として対角化可能である (6-4-6)

(※証明は付録 2 にて)

実対称行列の対角化は直交変換：回転(+軸反転)で可能ということになる。なお直交行列でなければ対角化できないということではないことに注意。(6-4-2)より異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するがそもそも正規化は必須でなく、また重複解となる同じ固有値に属する複数の固有ベクトルは必ずしも互いに直交する解のみとして得られるわけでもない。実際、前節の例 5) では直交していないが対角化はできている。重複解の固有ベクトルの組でも線形独立とはなり、正規直交化法などを用い正規直交基底となる固有ベクトルを選んで直交行列にできるということになる。

[6-4-4] 実二次形式

実二次形式とは、 n 個の実変数 x_i ($1 \leq i \leq n$) による 2 次の実係数多項式のこと、式で表せば $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ ($x_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$) のことである。この式は x_i, x_j について対称なので $(a_{ij} + a_{ji})/2$ を改めて a_{ij} としても結果は変わらないことがわかり、 a_{ij} は実対称行列 A の成分とみなせる。よって x_i を n 次列ベクトル x の成分とみなして以下のように書ける。

$$Q(x) = x^T A x \quad (A^T = A) \quad (6-4-7)$$

A は実対称行列なので n 個の実固有値をもち、それらを成分とする対角行列 Λ にある直交行列 R を用いて $\Lambda = R^{-1}AR$ と変換可能で、基底変換とみなし伴う座標変換を $y = R^{-1}x$ とすれば、 R は直交行列なので $Q = x^T A x = x^T R \Lambda R^{-1} x = (R^T x)^T \Lambda R^{-1} x = (R^{-1} x)^T \Lambda (R^{-1} x)$ となり、以下を得る。

$$Q(y) = y^T \Lambda y \quad (6-4-8)$$

このとき各固有値を(重複解の場合は重複数分も含めて) λ_i ($i = 1, \dots, n$) とすれば、この式は

【第6講】行列 III : 固有値・対角化

$Q(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ と書けることになり、全ての $\lambda_i > 0$ であれば Q は正定値、 $\lambda_i < 0$ であれば負定値となる。このような二次形式の性質は2次曲線の標準化や物理学の慣性モーメントの主軸変換等以外にも2次形式で表される系の**極値問題**（キーワード：ヘッセ行列、最小二乗法、正規方程式など）等にも応用される。次節で固有値問題や対角化の他の応用例の概要を紹介する。

【6-5】応用例

【6-5-1】剛体回転におけるオイラーの定理

定理：「球が中心のまわりを回転するとき、回転の前後で向きが不変となる直径が必ず存在する」

（注：3次元回転の話）解説しよう。模様が描かれたボールを「回転軸の変化も含めて自由に」転がして回しまくったあと回転前の模様と比較すると一般的には全く一致しないが、中心を通るある直線（直径）上のボールの表面部分の2点だけは回転の前後でピッタリと一致する、そんな2点が必ずみつかり、定理は主張している。もしそういう直径が存在すれば、それを軸とする一回の回転で回転前の姿勢に戻せるのは自明であり、その戻した回転の逆回転一回だけで複雑な回転の結果を実現できる。

[証明]：題意を満たす回転軸が存在することを示す。任意の複数の回転の合成は、その各回転を表す回転行列の積として表され、 R をその積の結果となる3次の回転行列とする。

行列式 $|R - E|$ を考えると、 $|R^T| = |R| = +1$, $RR^T = E$ より

$$\begin{aligned} |R - E| &= |R - E||R^T| = |(R - E)R^T| = |E - R^T| = |(E - R)^T| \\ &= |E - R| = |-(R - E)| = (-1)^3 |R - E| = -|R - E| \\ &\therefore |R - E| = 0 \end{aligned}$$

となり、任意の3次の回転行列が少なくとも一つ固有値1の固有ベクトル u を持つ事を意味する。

すなわち、

$$Ru = u \quad (6-5-1)$$

を満たし、この軸 u は回転による影響を受けない（つまり回転軸となる）。 ■

この定理は、第7講 回転の表現 I にて3次元回転の性質を調べる際に引用する。

【6-5-2】漸化式と特性方程式

高校時代に習った漸化式を解く際に用いる特性方程式というものがあった（今も習うよね？）。

隣接3項間漸化式： $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ に対して 特性方程式： $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ の解を α, β とすれば、一般項は $\alpha \neq \beta$ のとき $a_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1}$ として求まるというアレである（なつかし）。

当時は以下のようなロジックで学んだと思う。上記の漸化式をこんな風に書き換えたい：

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ (★) これは $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ (☆) とも書いてそれぞれ $a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$ および $a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$ と解け、辺々引くと $\alpha \neq \beta$ のとき $a_n = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} \alpha^{n-1} - \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha - \beta} \beta^{n-1}$ を得る。(★)を展開すると、 $a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ であり $p = \alpha + \beta, q = -\alpha\beta$ であればよいので、解と係数の関係から α, β は2次方程式 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ の解となり、これを特性方程式という。 みたいな。実はこれには裏がある。

漸化式を行列形式で書くと $\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$ (※)となり、一般項は $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ と書ける。固有方程式は $\begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - p\lambda - q = 0$ となり、解を α, β とすれば、固有ベクトルは固有値 α のとき： $\begin{bmatrix} p-\alpha & q \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ となり、同様に固有値 β のとき： $\begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。変換行列は $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で、 $\alpha \neq \beta$ (重解でない) のときは $P^{-1} = \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$ となり対角化可能。よって $\begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} = P \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{bmatrix} \alpha^n - \beta^n & -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & -\alpha^{n-1}\beta + \alpha\beta^{n-1} \end{bmatrix}$ を得て、これを用いて $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{bmatrix} (a_2 - \beta a_1)\alpha^n - (a_2 - \alpha a_1)\beta^n \\ (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} \end{bmatrix}$ を得る。なお基底の変換に伴い座標変換 $\begin{bmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$ を行くと、(※)は $\begin{bmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{bmatrix}$ と書け、この式を元の a_n で表すと $\frac{1}{\alpha-\beta} \begin{bmatrix} a_{n+2} - \beta a_{n+1} \\ -(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{bmatrix} \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ -\beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{bmatrix}$ となり(☆)(★)は漸化式を対角化した式だとわかる。以上の話は隣接 $n+1$ 項間線形漸化式に拡張でき、特性方程式は n 次行列の固有方程式となる。

[6-5-3] [▼B] フーリエ級数展開

やや高度な話となりまた微積の言葉も用いるため、ここでは概要を述べるにとどめる。微積に不慣れた読者はある程度習熟後、再度読んでもらえば意味がよく分かるかと思う。

第3講にて実変数関数の集合もベクトル空間の公理に従い関数はベクトルとみなせるという話をした。簡単のため区間 $[-\pi, \pi]$ での二階微分可能な周期関数の集合 V を考えよう。 $f \in V$ の二階微分となる演算 $\frac{d^2}{dx^2}$ を考えると、 $\frac{d^2}{dx^2}(f+g) = \frac{d^2}{dx^2}f + \frac{d^2}{dx^2}g$, $\frac{d^2}{dx^2}(kf) = k \frac{d^2}{dx^2}f$ となるため、 $\frac{d^2}{dx^2}$ は線形変換 $D: V \ni f \mapsto \frac{d^2}{dx^2}f \in V$ とみなすことができる。であれば微分方程式 $\frac{d^2}{dx^2}f = \lambda f$ は $Df = \lambda f$ (★) となる固有方程式だと考えることができ、実際よく知られている解 $f(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ (k は実数、 c_1, c_2 は積分定数) は「固有値」 $\lambda = -k^2$ となる「固有ベクトル」であると考えることができる。境界条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ を満たすには、 $c_1 \cos k\pi - c_2 \sin k\pi = c_1 \cos k\pi + c_2 \sin k\pi$ より k は $k = n, n \in \mathbb{Z}$ という整数値のみが許されることになる。 $n < 0$ のときは積分定数の符号に吸収、また $n = 0$ のとき解は定数となり、この境界条件を課した固有方程式 (★) の解は、固有値 $\lambda_n = -n^2$ (n は非負の整数) また固有ベクトル $u_0 = a_0$ ($n = 0$), $u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ($n > 0$) と書くことができる (固有関数ともいう)。

このベクトル空間 V に対して内積を $f \cdot g = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ と定義、この内積により規格化した固有ベクトルを $u_n^e = \cos nx, u_n^o = \sin nx$ ($n > 0$), $u_0^e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($n = 0$) とすれば、異なる固有値に属する固有ベクトル同士の内積をとると 0 (つまり直交) となり、 $u_n^e \cdot u_m^e = \delta_{nm}, u_n^o \cdot u_m^o = \delta_{nm}, u_n^e \cdot u_m^o = 0$ を得て、各固有ベクトル u_n^e, u_n^o は正規直交基底となる (無限次元空間だけど厳密には「完全性： u_n^e, u_n^o の線形結合で V の任意のベクトルを表示できること」を示す必要があるがこれは結構ムズカシイ話になる)。 V の任意の元 f のこの基底に対する成分はこの内積を用いて $a_n = u_n^e \cdot f, b_n = u_n^o \cdot f$ となり、 $f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n u_n^e + b_n u_n^o)$ と正規直交基底の線形結合により表すことができる。以上のことをフーリエ級数展開といい、仲間のフーリエ変換とともに理工系の多くの分野で応用されている。

[6-5-4] 行列指数関数

第2講において、指数関数の別定義を導出した。以下に再掲する。

$$\left[\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \end{aligned} \right. \quad (2-4-2)$$

これを一般化して、 n 次正方行列 X を指数とする関数（正確には $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ の写像）を定義できないだろうか？具体的には、 $X^0 \equiv E$ としたとき以下のような定義とする。

$$e^X \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \quad (6-5-2)$$

この定義が意味をなすには、この級数が収束しなければならない。行列 X の成分を $x_{ij} \in \mathbb{R}$ とすると、 X^k の各成分は 高々 x_{ij}^k 程度であり、(2-4-2)式が任意の $x \in \mathbb{R}$ で収束するのであれば、この定義の行列の各成分も収束しそうではある。実は (6-5-2)式は任意の実数成分の値に対して収束することが知られている（さらに言えば任意の複素数成分としても収束する）。

なお一般的には $e^X e^Y \neq e^{X+Y}$ であることに注意。これは $e^X e^Y = (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^m) (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n)$ において X と Y の積が交換可能でないため、 $e^{X+Y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (X+Y)^k$ と異なるためで、もし X と Y が可換であれば $e^X e^Y = e^{X+Y}$ となることは両式を展開してみれば容易にわかる。

ここでは任意の対角化可能な行列に対し行列指数関数を具体的に求める方法を考察しよう。

以下の2式を示す。いずれも n 次の 対角化可能な行列を A 、変換行列を P ($\Lambda = P^{-1}AP$)、

A を対角化した行列を $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 、任意の実対角行列を $D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ としたとき

$$(i) \ e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_n} \end{bmatrix} \quad (6-5-3) \quad (ii) \ e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (6-5-4)$$

$$(i) : e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} d_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_n} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

$$(ii) : P^{-1}e^A P = P^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k)P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}A^k P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k = e^{\Lambda}$$

$$\therefore e^A = P e^{\Lambda} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1} \quad \blacksquare \quad (\text{級数は収束するので (6-3-20) からいえる})$$

なお最後の式から $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ が成り立つことがわかる。

$$\therefore \det(e^A) = |Pe^{\Lambda}P^{-1}| = |P||e^{\Lambda}||P^{-1}| = |e^{\Lambda}| = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\text{tr}(A)} \quad \blacksquare$$

(三角行列でも同様となり任意の正方行列 A で成り立つ。 $e^{\text{tr}(A)} \neq 0$ より e^A は正則といえる。)

さて、こんなもの（行列指数関数）何に使うの？と思う人もいると思う。例えば列ベクトルで表されるある量 x があるパラメータ (t とか) で変化し、行列 A を用いた微分方程式 $\frac{d}{dt}x = Ax$ と書けたとすると、 $x(t) = e^{At}x(0)$ と解きたくはないか。他にも数学や物理学でたくさん応用されているのだが、別の例として前講の付録2の続きを本講付録3に載せるので参照して頂きたい。

【6-6】付録 1 : 複素ベクトル空間・行列について

本講座ではこれまで実ベクトル空間を扱ってきた。これを複素ベクトル空間に拡張することは、スカラー積のスカラー値が複素数となることの他に、内積の公理が実数向けから複素数向けに拡張されることになり、関連して転置行列が共役転置行列、対称行列がエルミート行列、直交行列がユニタリー行列へとそれぞれ拡張される。以下にその要点をまとめた。なお物理学（および一部の工学）では、複素数向けの内積の公理の一部、複素共役や共役転置を示す記号が異なるので合わせてまとめた。

●内積の違い

	スカラー	対称性	線形性（スカラー積）	数ベクトルの内積
実ベクトル空間	$k \in \mathbb{R}$	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$	$(k_1 \mathbf{x}) \cdot (k_2 \mathbf{y}) = k_1 k_2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$	$\mathbf{x}^T \mathbf{y}$
複素ベクトル空間	$k \in \mathbb{C}$	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})}$	$(k_1 \mathbf{x}) \cdot (k_2 \mathbf{y}) = k_1 \bar{k}_2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$	$\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}$
同 物理学等	同上	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})^*$	$(k_1 \mathbf{x}) \cdot (k_2 \mathbf{y}) = k_1^* k_2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$	$\mathbf{x}^\dagger \mathbf{y} (= \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{y})$

物理学での*は複素共役を表す

●転置と共役転置

行列の転置以外に、転置してかつ複素共役をとることがでてくる。このことを**共役転置**といい、 A^* と表記する。式では $A^* = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$ という意味となる。共役転置のことをエルミート転置、**エルミート随伴**、また共役転置した行列のことを**随伴行列**ともいう。物理学等では、 $A^\dagger$ と記す。

●エルミート行列とユニタリー行列

転置しても変わらない行列を対称行列としたように、共役転置しても変わらない行列を**エルミート行列**という。式で書けば $A^* = A$ となる行列のことを指す。同様に転置行列が逆行列になる行列を直交行列としたように、共役転置行列が逆行列になる行列を**ユニタリー行列**という。式で書けば $A^* = A^{-1}$ あるいは $A^* A = A A^* = E$ となる行列のことを指す。いずれも物理学等では $A^\dagger$ と記す。

【6-7】付録 2 : 各証明

●互いに相異なる固有値に属する固有ベクトルの組は線形独立となる

n 次の行列 A の固有方程式は、複素数の範囲で重複解の重複数を含めて n 個の解を持つ。従って互いに相異なる固有値の数 m は一般に $m \leq n$ となる。この m 個の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とし、各固有値の固有ベクトルを（重複解の固有値が複数の固有ベクトルを持つ場合は任意に 1 つ選んで） $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ とする。このうち最初の l 本の固有ベクトルの線形結合式 $c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_l \mathbf{u}_l = \mathbf{0}$ が $l = 1$ から m まで全て自明な解のみを持つことを、数学的帰納法で示す。

1) $l = 1$ のとき：固有ベクトル $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ より、 $c_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ は $c_1 = 0$ となる自明な解のみを持つ。

2) $l = k - 1$ で成り立つと仮定 ($k \leq m$)

【第6講】行列 III : 固有値・対角化

3) $l = k$ のとき : $c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ (☆) を満たす $c_1, \dots, c_k$ の解を考える。

(☆) に対して行列 A を掛けると $c_1 A \mathbf{u}_1 + \cdots + c_k A \mathbf{u}_k = c_1 \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_k \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ となる。

この式から (☆) に対して λ_k を掛けた $c_1 \lambda_k \mathbf{u}_1 + \cdots + c_k \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ を辺々引くと

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{u}_{k-1} + c_k(\lambda_k - \lambda_k) \mathbf{u}_k \\ = c_1(\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{0} \text{ となるが、この式は 2) より}$$

$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) = 0, \dots, c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$ となる自明な解のみをもつ。今 λ_k は $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ のどれとも異なるので、 $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ を得る。これを (☆) に代入すると $c_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ となるが、

$\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$ より $c_k = 0$ も成り立つ。よって (☆) は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ となる自明な解のみを持つ。

以上により、(☆) が $l = 1, \dots, m$ のときも自明な解のみを持つことが帰納的に示された。

従って、異なる固有値に属する固有ベクトルの組は線形独立となる。 ■

●行列の三角化 : 任意の正方行列 A に対してある正則行列 P が存在し

$\Gamma = P^{-1}AP$ として (上) 三角行列 Γ に相似変換することができる。

このことを A の次数 n に対する数学的帰納法を用いて示す。

1) $n = 1$ のとき : 1 次の正方行列は上三角行列とみなすことができ、明らかに成り立つ。

2) $n = k - 1$ で成立すると仮定

3) $n = k$ のとき : k 次の正方行列 A は少なくとも 1 つの固有値とそれに属する固有ベクトルをもち、これを $\lambda_1, \mathbf{u}_1$ とする。 $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ であり、 $k - 1$ 本の列ベクトル $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ を選び k 本の線形独立なベクトルの組を作ることができる。これを並べた行列を $Q = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_k]$ とする。 Q は正則となるので逆行列 Q^{-1} が存在し、それらの積 $Q^{-1}AQ$ を標準基底である列ベクトル $\mathbf{e}_1$ に掛けると、 $Q^{-1}AQ\mathbf{e}_1 = Q^{-1}A\mathbf{u}_1 = Q^{-1}\lambda_1\mathbf{u}_1 = \lambda_1 Q^{-1}\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$ となる。左辺は $Q^{-1}AQ$ の積の結果の 1 列目でもあるので、 $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{0} & A_{k-1} \end{bmatrix}$ と書くことができる。ここで $A_{k-1}, \mathbf{c}^T, \mathbf{0}$ はそれぞれ $k - 1$ 次となる、ある正方行列、不定な行ベクトル、列ゼロベクトルである。2) より $k - 1$ 次の

正方行列は三角化可能なので、ある正則な行列 P_{k-1} が存在して、 $\Gamma_{k-1} = P_{k-1}^{-1}A_{k-1}P_{k-1}$ として三角行列 $\Gamma_{k-1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & * \\ \mathbf{0} & \ddots & * \\ 0 & \mathbf{0} & \lambda_k \end{bmatrix}$ に相似変換できる。ここで k 次の正方行列 P を $P = Q \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1} \end{bmatrix}$ として定める。 $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1}^{-1} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1} \end{bmatrix}$ の逆行列であり、 Q は正則なので P も正則となり

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1}$ としてその逆行列も求まる。この正則な行列 P で A を相似変換すると、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1}AQ \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{0} & A_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{c}^T P_{k-1} \\ \mathbf{0} & A_{k-1} P_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{c}^T P_{k-1} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & * \\ \mathbf{0} & \ddots & * \\ 0 & \mathbf{0} & \lambda_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ となり}$$

三角化は $n = k$ のときも可能となる。以上により正方行列の三角化が可能であることが帰納的に任意の次数で成り立つことが示された。 ■

●実対称行列の固有値は全て実数となる（複素ベクトルの内積は付録 1 も参照）

n 次実対称行列の固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$ その固有ベクトルを $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ とする。

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= \lambda(\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{u}}) = (\lambda \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{u}} = (A\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^T A^T \bar{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{u}^T A \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^T \overline{A\mathbf{u}} = \mathbf{u}^T \overline{(\lambda \mathbf{u})} = \mathbf{u}^T \bar{\lambda} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}(\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\lambda}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \quad \text{より}\end{aligned}$$

$(\lambda - \bar{\lambda})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ となるが、 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ より $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ よって $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ を得て題意は示された。 ■

（なお上記証明からわかるように、エルミート行列の固有値も実数となる。）

●実対称行列は直交行列で対角化可能である（三角化可能の証明とほぼ同様となる）

任意の実対称行列 A が、ある直交行列 R を用いて対角行列に $\Lambda = R^{-1}AR$ として相似変換できるとを A の次数 n に対する数学的帰納法を用いて示す。

1) $n = 1$ のとき：1 次の行列は対角化されているとみなせるので明らかに成り立つ。

2) $n = k - 1$ で成立すると仮定

3) $n = k$ のとき： k 次の対称行列 A は少なくとも 1 つの固有値とそれに属する固有ベクトルをもち、これを $\lambda_1, \mathbf{u}_1$ とする。 $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ であり正規化されたものとし、 $k - 1$ 本の列ベクトル $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ を選び k 本の正規直交なベクトルの組を作ることができる。これを並べた行列を $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k]$ とすると P は(5-4-7)より直交行列となる。 P は正則なので逆行列 P^{-1} が存在し、それらの積 $P^{-1}AP$ を標準基底である列ベクトル $\mathbf{e}_1$ に掛けると、 $P^{-1}AP\mathbf{e}_1 = P^{-1}A\mathbf{u}_1 = P^{-1}\lambda_1\mathbf{u}_1 = \lambda_1 P^{-1}\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$ となる。左辺は $P^{-1}AP$ の積の結果の 1 列目でもあるので、 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{c}^T \\ \mathbf{0} & A_{k-1} \end{bmatrix}$ と書くことができる。ここで $A_{k-1}, \mathbf{c}^T, \mathbf{0}$ はそれぞれ $k - 1$ 次となる、ある正方行列、不定な行ベクトル、列ゼロベクトルである。両辺の転置をとると P は直交行列なので $(P^{-1}AP)^T = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{c} & A_{k-1}^T \end{bmatrix}$ より、 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ および A_{k-1} も対称行列であることがわかる。2) より $k - 1$ 次の対称行列は対角化可能なので、ある直交行列 R_{k-1} が存在して、 $\Lambda_{k-1} = R_{k-1}^{-1}A_{k-1}R_{k-1}$ として対角行列 $\Lambda_{k-1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$ に

相似変換できる。ここで k 次の正方行列 R を $R = P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1} \end{bmatrix}$ として定める。 P, R_{k-1} は直交行列なので、 R の転置行列は $R^T = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1}^T \end{bmatrix} P^T = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}$ となり、これは R の逆行列となるので、 R もまた直交行列となることがわかる。この直交行列 R で A を相似変換すると、

$$\begin{aligned}R^{-1}AR &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}AP \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & A_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & A_{k-1}R_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R_{k-1}^{-1}A_{k-1}R_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \Lambda_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} \quad \text{となり}\end{aligned}$$

対角化は $n = k$ のときも可能となる。以上により実対称行列の直交行列による対角化が可能であることが帰納的に任意の次数で成り立つことが示された。 ■

【6-8】[▼A]付録 3 : オイラーの公式の行列表現

本付録では、第 5 節の最後で導入した行列指数関数 および 第 5 講 付録 2 で導入した行列による複素数の表現の話の続きとして、オイラーの公式の行列表現を第 2 講での手順と同様にして導く。

ポイントは複素数の行列表現において $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ が $E^2 = E, I^2 = -E, EI = IE = I$ となり (つまり E と I は可換である)、複素数における $1^2 = 1, i^2 = -1, 1i = i1 = i$ と代数的に全く同じふるまいをすることにあり、積や累乗において単純に置き換えても成り立つことがわかる。

- ・極形式での複素数の行列表現での積 (加法定理)

$$Z_1 Z_2 = (\cos \theta_1 E + \sin \theta_1 I)(\cos \theta_2 E + \sin \theta_2 I) = \cos(\theta_1 + \theta_2) E + \sin(\theta_1 + \theta_2) I$$

- ・上記より帰納的にド・モアブルの定理を得る

$$Z^2 = (\cos \theta E + \sin \theta I)^2 = \cos 2\theta E + \sin 2\theta I$$

$$Z^3 = (\cos \theta E + \sin \theta I)^3 = \cos 3\theta E + \sin 3\theta I$$

⋮

$$\therefore (\cos \theta E + \sin \theta I)^n = \cos n\theta E + \sin n\theta I$$

- ・行列指数関数の定義

$$e^X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{1}{n} X \right)^n$$

- ・二項展開で $\left(E + \frac{1}{n} X \right)^n$ の一般項を得る (E と X は可換であることに注意)

$$\left(E + \frac{1}{n} X \right)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k E^{n-k} \left(\frac{1}{n} X \right)^k = E + X + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} X^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} X^3 + \dots$$

よって

$$e^X = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{1}{n} X \right)^n = E + X + \frac{1}{2!} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \dots$$

- ・(純虚) 行列指数関数

$$e^{xI} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{x}{n} I \right)^n$$

- ・ド・モアブルの定理の書き換え ($n\theta = x$)

$$\cos x E + \sin x I = \left(\cos \frac{x}{n} E + \sin \frac{x}{n} I \right)^n \rightarrow \left(E + \frac{x}{n} I \right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって最後の 2 式より

$$e^{\theta I} = \cos \theta E + \sin \theta I \quad (6-8-1)$$

として、オイラーの公式の行列表現を得る。この式の登場人物は全員実数であることに注意。また右辺は大きさ 1 の複素数の極形式の行列表現であり 2 次の回転行列でもあることから、 $e^{\theta I}$ は 2 次の回転行列そのものでもあることに注意。

この 2 次の回転行列が行列指数関数で表すことができたのは偶然なのだろうか？ 話はまだ続く。

次回は第 7 講 回転の表現 I の付録にて、3 次の回転行列についてみてみることになる。

【第 7 講】 回転の表現 I

【7-1】 はじめに

前講まで線形代数の基礎を駆け足で学んできた。様々な分野でその応用上重要となる 3 次元回転の表現について代表的な 4 種をこれから 2 講に分けて学ぶ。本講では、「回転行列」「オイラー角（および Tait-Bryan 角）」「回転ベクトル」の 3 種を取り上げる。本 2 講の目的はこれらを通して 3 次元回転⁴⁹ そのものの理解を深めることにある。まず 3 次元回転とは何か？改めて考察することから始めよう。

● 3 次元回転に対する考察

○回転とは？：変形しない物体、いわゆる剛体の動きを考えよう。この剛体内の各点との相対的な位置が不変な任意の点 O' （わかりやすいのは剛体内の点であるが、この条件を満たせば剛体外の点でもよい）を代表点として選び、代表点 O' の 3 次元空間内での位置を決めて固定してみよう。それでもまだ剛体は固定された点 O' のまわりを動く自由度を持っている。この固定された点 O' のまわりを動くことを我々は**回転**とよび、点 O' のことを**回転の中心**とよんでいることがわかる。

○回転中心の位置：対して代表点 O' 自体の空間内での剛体の向きを変えない動きのことを**並進**とよべば、並進の動きは回転とは独立していることがわかる。よって O' を空間の原点と定めた O に並進させて考えても（回転後に O' を並進させ戻すことで）回転としての一般性は失われない。

○相対的な変位としての回転：並進は 3 次元空間内の基準点からの変位としての相対的な量として意味を持ち、例えば位置ベクトルとして表現され記述されることがわかる。また 2 次元回転も基準となる向きからの相対的な回転角として記述されている。同様に 3 次元回転も基準となる姿勢からの相対的な変位として意味を持ち、そのように記述されるべきであろう。なお、これらの変位は結果のみを表すものであり、途中の情報（どのように到達したのか等）は含んでいないことに注意。

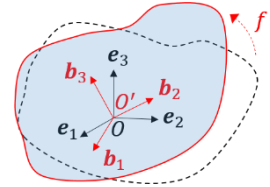
○回転の自由度：並進の自由度は明らかに 3 であるが、回転の自由度はいくつだろうか？ 回転の中心を O とし、それ以外の剛体内の任意の点を P とする。点 P は回転に伴い中心 O のまわりを動くが、 OP 間の距離は不変であり、 O を中心とした球面上を移動することがわかる。よってこのときの P の自由度は 2 となる。 P を固定したとしても、まだ剛体は直線 OP を軸として回転する自由度をもっている。このときの回転は 2 次元の回転と同様に回転角で指定でき、1 自由度であることがわかる。これも固定されると剛体は完全に固定され、従って回転の自由度は 3となることがわかる。

⁴⁹ 本講座では数学や物理学の慣習に従い、いわゆる右手系による記述を行う。殆どの文献も右手系で記述されているので、右手系による記述内容を十分理解したうえで左手系を取り扱うことをお勧めする。

【7-2】回転行列

【7-2-1】考察の定式化

前述の回転に対する考察を素直に定式化してみよう。まず舞台となる3次元空間を、標準基底 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ により普通の直交座標が張れるベクトル空間、いわゆるユークリッド空間 E^3 とし原点 O を定めよう。次に代表点 O' を始点とする、剛体に対して固定された正規直交基底 $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ を剛体に固有な基底としよう。代表点 O' を原点 O に移動させ固定し、さらに標準基底 E も原点 O を始点として空間に固定されているとしよう。これにより剛体に固定された B が空間に固定された E と一致しているときを「基準となる姿勢」と定義できる。回転後 B を固定すれば剛体の姿勢が定まりそのときの E に対する B の相対的な変位として回転を記述できるだろう。そこで E を B へ写す写像（変換）としての記述を考えてみよう。



この変換（写像） $f: E^3 \rightarrow E^3$ （線形変換とは言っていないことに注意）は E を B に写すので

$$f(e_1) = b_1, f(e_2) = b_2, f(e_3) = b_3 \text{ および } f(0) = 0 \quad (7-2-1)$$

がいえる。最初の3式は $f: E \mapsto B$ を表し最後の式は回転の中心が原点に固定されていることを表す。また剛体の任意の2点を X, Y とし、基準姿勢のときのそれぞれの位置ベクトルを x, y とすれば、2点間の距離は回転しても不変なので

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad (7-2-2)$$

がいえる。点 Y を原点 O とすれば、 $y = 0$ および $f(0) = 0$ より $\|f(x)\| = \|x\|$ も成り立つ。

また剛体の大きさは任意であり、回転により変換される点は E^3 の任意の点と考えてもよい。

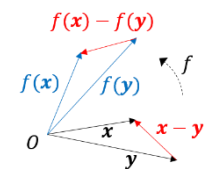
よって回転変換 f に対して以下のことがいえる。

$$\bigcirc f \text{ はノルムを不変に保つ} : \forall x \in E^3, \|f(x)\| = \|x\| \quad (7-2-3)$$

またこれらのことから以下の2つのこともいえる（証明は付録1にて）。

$$\bigcirc f \text{ は内積を不変に保つ} : \forall x, y \in E^3, f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \quad (7-2-4)$$

$$\bigcirc f \text{ は線形変換である} : \forall x, y \in E^3, \forall k \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y), f(kx) = kf(x) \quad (7-2-5)$$



回転変換は線形変換となることが確認できたので、これまで学んできた知見が適応でき回転変換は行列を用いて表現できることになる。第5講 第4節にてノルムと内積を不変に保つ線形変換の表示行列として直交行列を学んだ。またここでいう回転は鏡映（反転）を含まない。従って、回転変換 f の表示行列としてはその行列式が $+1$ となる3次の回転行列という結論となる。

以上、一般的な3次元回転に対する考察を定式化したところ、回転行列がその素直な表現となるであろうことがわかった。次項で定式化した内容に対し第5講第4・5節にて学んだことを復習兼ねて当てはめながら、3次の回転行列を具体的に調べていこう。

[7-2-2] 表示行列としての回転行列

●回転変換と表示行列

回転を表す線形変換 f により標準基底 $\{e_i\}$ は正規直交基底 $b_i = f(e_i)$ として写される。[5-5-4] で学んだようにその表示行列を R 、成分を r_{ij} とすれば回転変換 f は以下のように表示される。

$(b_1 \ b_2 \ b_3) = (f(e_1) \ f(e_2) \ f(e_3)) = (e_1 \ e_2 \ e_3)R$ or $b_j = f(e_j) = \sum_{i=1}^3 e_i r_{ij}$ (7-2-6)
 b_i の標準基底 $\{e_i\}$ に対する列ベクトル表示を b_{iE} とすれば、 R は b_{iE} を並べたものとなり、

$$R = \begin{bmatrix} (b_{1E})_1 & (b_{2E})_1 & (b_{3E})_1 \\ (b_{1E})_2 & (b_{2E})_2 & (b_{3E})_2 \\ (b_{1E})_3 & (b_{2E})_3 & (b_{3E})_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot b_1 & e_1 \cdot b_2 & e_1 \cdot b_3 \\ e_2 \cdot b_1 & e_2 \cdot b_2 & e_2 \cdot b_3 \\ e_3 \cdot b_1 & e_3 \cdot b_2 & e_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad r_{ij} = e_i \cdot b_j \quad (7-2-7)$$

と書いて、直交行列であることと同値な条件 (5-4-7) より R は確かに直交行列となる。行列式は

$$|R| = D(b_{1E}, b_{2E}, b_{3E}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} (b_{1E})_i (b_{2E})_j (b_{3E})_k = b_1 \cdot (b_2 \times b_3) = +1 \quad (7-2-8)$$

より確かに R は回転行列といえる。このように回転行列は基準姿勢 E からみた回転後の姿勢 B

をその列ベクトルの組として表示することになる。 E^3 の任意の点 $x = \sum_i e_i x_i = (e_1 \ e_2 \ e_3)x_E$ は

$$x'_E = R x_E \quad \text{or} \quad x'_i = \sum_j r_{ij} x_j \quad (7-2-9)$$

なる回転としての線形変換により、 $x' = f(x) = (e_1 \ e_2 \ e_3)x'_E = \sum_i e_i x'_i$ に写されることとなる。

●逆変換と逆行列

回転した剛体を基準姿勢に戻す逆変換を考えよう。回転変換 f により $f: e_i \mapsto b_i = f(e_i)$ という変換をするとき、変換先のベクトルの組 $\{b_i\}$ は基底であり線形独立となるので、その逆変換が定義でき $f^{-1}: b_i \mapsto e_i = f^{-1}(b_i)$ とできる。この表示行列は回転行列 R の逆行列となり、 $R^{-1} = R^T$ として求まることになる。実際 (7-2-7) 式より以下のように逆行列であることを確かめられる。

$$R^T R = \begin{bmatrix} e_1 \cdot b_1 & e_2 \cdot b_1 & e_3 \cdot b_1 \\ e_1 \cdot b_2 & e_2 \cdot b_2 & e_3 \cdot b_2 \\ e_1 \cdot b_3 & e_2 \cdot b_3 & e_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \cdot b_1 & e_1 \cdot b_2 & e_1 \cdot b_3 \\ e_2 \cdot b_1 & e_2 \cdot b_2 & e_2 \cdot b_3 \\ e_3 \cdot b_1 & e_3 \cdot b_2 & e_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \cdot b_1 & b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot b_3 \\ b_2 \cdot b_1 & b_2 \cdot b_2 & b_2 \cdot b_3 \\ b_3 \cdot b_1 & b_3 \cdot b_2 & b_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} = E$$

また R^T は基底 $\{b_i\}$ に対する $\{e_i\}$ の表示行列であることもわかる。逆変換として次式を得る。

$$x_E = R^{-1} x'_E \quad \text{or} \quad x_i = \sum_j r_{ij}^{-1} x'_j \quad (7-2-10)$$

●各座標軸周りの回転

e_3 を回転軸とする回転を考えてみよう。 e_3 は回転軸として不変となり、対して e_1, e_2 は2次元の回転と同様に e_3 を中心に回転することになる。従ってこの2次元回転の回転角を θ とすれば

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (7-2-11)$$

となることがわかる。列ベクトルの組は $b_{iE} \cdot b_{jE} = \delta_{ij}$ として確かに正規直交基底をなし、

転置行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は $R_3(\theta)$ の逆行列となるが、 $R_3(-\theta)$ でもあり、文字通りの逆回転

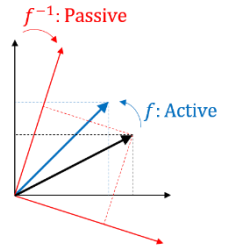
を示す。 e_1, e_2 を回転軸とした場合も同様に以下の式となる。

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

【第 7 講】回転の表現 I

● Active 変換と Passive 変換

[5-5-7]で学んだように、線形変換により E^3 の点が (7-2-9) 式のように実際に回転変換される (Active 変換) のとは違う仕組みで、点は動かさず基底を変換しそれに伴う座標変換を用い形式上同じ変換 (Passive 変換) を行う仕組みがあった。Passive 変換の場合、基底は実現したい回転変換の逆変換 $e'_i = f^{-1}(e_i)$



として変換され、その表示行列は元の回転変換 f の表示行列である回転行列の逆行列を用いて

$$(e'_1 \ e'_2 \ e'_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3)R^{-1} \quad (7-2-12)$$

となり、これに伴い E^3 上の点を表す任意のベクトルに対し $x = (e_1 \ e_2 \ e_3)x_E = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3)x_{E'}$ として同じ点を異なる基底で表した際の座標変換が (7-2-9) 式である Active 変換と形式的に同じ式

$$x_{E'} = Rx_E \quad (7-2-13)$$

として書けることとなる。この Passive 変換 (7-2-13) 式は Active 変換 (7-2-9) 式と同じ回転行列による行列の積の変換で見た目は全く同じだが内実は異なることに改めて注意が必要となる。

● intrinsic 回転と extrinsic 回転

応用上、回転の対象となる物体は固有な回転軸をもっている場合も少なくない。例えば物理学的な意味での剛体は、慣性主軸とよばれる慣性モーメント(行列)に関する固有ベクトルを有しており、この慣性主軸周りでの回転の記述が最も適していることが知られている。あるいは CG において例えば航空機や人体の骨などモデルにより自然な回転軸が存在し、その軸周りでの回転が適切となる。物体が固有な回転軸を複数もつ場合、回転に伴い別の回転軸の向きは必ず変わり、回転後は向きが変わった軸周りの回転を行っていくことになる。このような物体固有の回転軸まわりの回転を **intrinsic** な回転とよぶことがある。また一方で空間全体に定めた座標系に固定された複数の回転軸 (通常は座標軸の 3 軸) による回転として回転を記述することの方が都合な場合もある。このような回転を **extrinsic** な回転とよぶことがある。この 2 種類の回転の記述の仕方は、先にあげた Active/Passive 変換とともに、回転の合成において絡み合っていくことになる。

● 回転の合成

[5-5-8]で学んだように 2 種類の回転変換 f, g を続けて行った場合の合成変換 $h = g \circ f$ は $f: x \mapsto x' = f(x)$, $g: x' \mapsto x'' = g(x')$, $h = g \circ f: x \mapsto x'' = g(f(x))$, $x, x', x'' \in E^3$ (7-2-14) としたとき、点 x, x', x'' および回転変換 f, g, h それぞれの標準基底に対する列ベクトルを x_E, x'_E, x''_E , 表示行列を F_E, G_E, H_E とすれば線形変換 (Active 変換) として

$$x''_E = H_E x_E, \quad H_E = G_E F_E \quad (7-2-15)$$

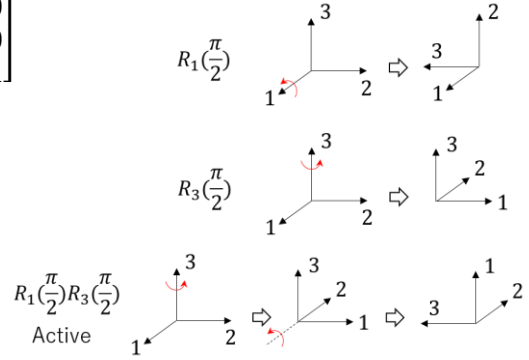
を得る。このとき 2 回目に行う回転 g の回転軸は、標準基底 E で張られる座標系における軸となり、extrinsic な回転であることに注意。実際に各座標軸周りの回転で確かめてみよう。図は 1 軸および 3 軸周りの $\pi/2$ 回転を示したもので、1 回目を 3 軸周り、2 回目を 1 軸周りの回転として (回転変換の表示行列は、各列ベクトルが回転後の正規直交基底を表示していることに注意)

$$G_E: R_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_E: R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

として合成すると回転行列は

$$R_A = R_1\left(\frac{\pi}{2}\right) R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、確かに線形変換である Active 変換は extrinsic な回転を表していることが分かる。



一方、基底の変換に伴う座標変換である Passive 変換での合成ではどうなるだろうか？

これも [5-5-8] で学んだように、基底の変換は実現する座標変換の逆変換となるため、以下の

$$(e'_1 \ e'_2 \ e'_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3) F_E^{-1}, \quad (e''_1 \ e''_2 \ e''_3) = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3) G_E^{-1} \quad (7-2-16)$$

なる変換を行い、これに伴う各変換後の基底によるベクトル x の列ベクトル表示

$$x = (e_1 \ e_2 \ e_3) x_E = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3) x_{E'} = (e''_1 \ e''_2 \ e''_3) x_{E''} \quad (7-2-17)$$

および各基底の変換に伴う座標変換の合成と、(5-5-13)式で $P_{B \rightarrow C} = F_E^{-1}$ にあたる表示行列の変換

$$x_{E'} = F_E x_E, \quad x_{E''} = G_E x_{E'}, \quad x_{E''} = H_E x_E, \quad H_E = G_E F_E \quad (7-2-18)$$

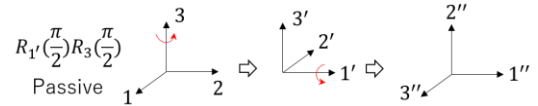
$$G_{E'} = F_E G_E F_E^{-1} \quad (7-2-19)$$

を得て、これらは intrinsic な回転を表すことになる。実際、各座標軸周りの回転で確かめてみると

$$R_{1'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) R_1\left(\frac{\pi}{2}\right) R_3^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より、合成された回転行列は

$$R_P = R_{1'}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



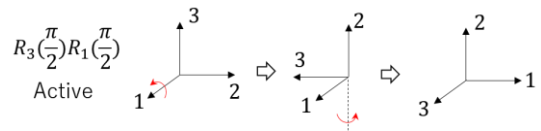
となり確かに基底変換に伴う座標変換である Passive 変換は intrinsic な回転を表すことがわかる。

また基底の合成変換が $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ となることより、相当する Active 変換である線形変換の合成変換は $h = f \circ g$ となり、変換順を逆にした以下の extrinsic な表現もできる。

$$R_A = R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) R_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

これらの行列が等しいことは (7-2-19)式より

$$R_P = G_{E'} F_E = F_E G_E = R_A \text{ からいえる。}$$



●パラメータの自由度と領域

3次回転行列は成分の数9に対し直交行列である条件 $R^T R = E$ (同値となる列ベクトルの組とみなしたとき正規直交基底となる条件) より、独立な自由度は3となり確かに考察を満たす。この正規直交基底の姿勢ひとつひとつが各3次元回転に相当し、基底の姿勢と回転行列の成分は1対1に対応することになるので、回転行列のパラメータ領域は3次元回転と1対1に対応することになる。しかしながら9つの成分に6つの拘束条件をかけ独立な自由度3となる構造は、冗長ともいえ応用上その点は注意が必要となる。次節では最小限の3つのパラメータで回転を表現する手法を学ぶ。

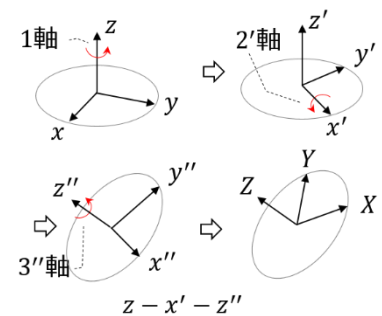
【7-3】オイラー角と仲間たち

【7-3-1】回転後の基底の姿勢を3つの回転角で表す

冒頭の考察により回転を表現するとは、基準となる標準基底と、剛体に固定された正規直交基底との自由度3の変位を記述することであった。基準姿勢から目的の姿勢を表す正規直交基底に3つの回転角、すなわち3回の座標軸周りの回転で一致させる記述の仕方を考えよう。座標軸を回転軸として用いる複数回の回転なので、intrinsicな回転となる。まず議論する上での用語を定義しよう。

○座標系：基準となる標準基底の座標系を xyz ，1回転目で写る先の座標系を $x'y'z'$ ，2回転目で $x''y''z''$ ，最後の3回転目で写る先の目的の正規直交基底の座標系を XYZ としよう。

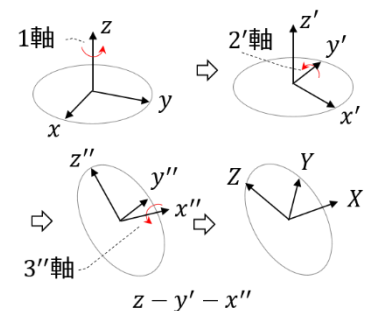
○回転軸：3回の回転で一致させるので用いる座標軸は3本となる。この3本について1回転目を1軸、2回転目を2'軸、3回転目を3''軸とよぶことにしよう。1軸は xyz のうちのどれかの軸、2'軸は $x'y'z'$ のどれか、3''軸は $x''y''z''$ のどれかを軸に選ぶことになる。(このように軸の選び方でさまざまなバリエーションが生まれてしまうことになる⁵⁰。)



考察しながら判明したことをあげていこう。

1) 1軸と2'軸、2'軸と3''軸とでは用いる座標軸は異なる。→上図では1軸として z 軸を選んだが回転軸なので z' 軸でもあり、2'軸としては x' か y' 軸を用いることになる。同様に2'軸は x' 軸を選んだが x'' 軸でもあり、3''軸としては y'' か z'' 軸を用いることになる。

2) 上記1)より、1軸は xyz の3通り、2'軸は $x'y'z'$ のうち1軸で選ばなかった2通り、3''軸は $x''y''z''$ のうち2'軸で選ばなかった2通りだが、これは1軸で選んだ軸と同じか異なるかの2通りで前者と後者に大別されることになる。選んだ1-2'-3''軸として、前者の6通りの代表を $z-x'-z''$ (上図) とし、後者の6通りの代表を $z-y'-x''$ (下図) としよう。軸の選び方が異なるだけで代表以外も議論は同様に適用される。



3) 1軸と2'軸は直交し、2'軸と3''軸も直交する。→
 $x'y'z'$ にて2'軸として選ばなかったどちらかの軸は元1軸でもあり従って直交する。同様に $x''y''z''$ にて3''軸として選ばなかったどちらかの軸は元2'軸でもあり従って直交する。

⁵⁰ 軸の選択はあくまで事前の規約であり、動的（回転中）に選ぶという意味ではない（念のため）

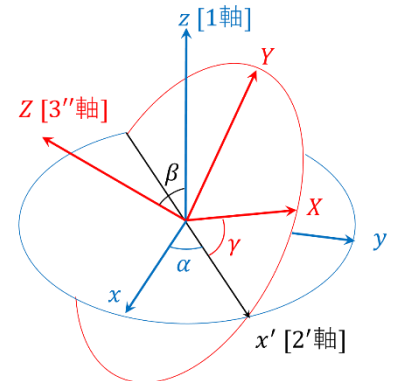
4) 3'' 軸が $x''/y''/z''$ 軸であれば $X/Y/Z$ 軸でもある。→最後の回転で $x''y''z''$ は XYZ に一致することになるが 3'' 軸は回転軸なのでその回転時には既に一致している。図の例では、3'' 軸は z''/x'' 軸であるが、これは Z/X 軸にその回転時には既に一致している。

5) 上記 3) 4) より、2' 軸の方向は 1 軸 (xyz のどれか) と 3'' 軸 (XYZ のどれか) との外積で得られる。→ 2' 軸は 1 軸と 3'' 軸のどちらとも直交するので、方向はその外積のベクトルの方向となる。ただし例外として 1 軸と 3'' 軸が平行（一致するか反対向き）な場合、2' 軸の方向は定まらないことになる。この場合、後にわかるようにそもそも 3 回でなく 1 回もしくは 2 回の回転で達成できる特殊な最終姿勢ということになり、一般的な姿勢とは別扱いとなる。

以上により 5) の例外の場合は別扱いとし、それ以外の一般の回転変換先の正規直交基底に対して各回転軸が一意に定まり、後述するようにその回転角も幾何学的に一意に定まるので求める表現を得ることになる。代表 $z-x'-z''$ の回転角の組ことを（狭義の）**オイラー角**といい、代表 $z-y'-x''$ の回転角の組のことを **Tait-Bryan 角**という。次項以降にてそれぞれ詳細を述べる。

[7-3-2] オイラー角

●定義： 1-2'-3'' 軸として $z-x'-z''$ 軸を適用したものを（狭義の）オイラー角という。図のように 2' 軸である x' 軸は、1 軸である z 軸と 3'' 軸である Z 軸 (z'' 軸) のどちらとも直交する。その方向は z 軸と Z 軸 との外積にて求まり、向きは $z \times Z$ の正の方向となる。以下、基準座標系 xyz の標準基底を $\{e_x, e_y, e_z\}$ 、回転後の座標系 XYZ の正規直交基底を $\{b_x, b_y, b_z\}$ 、 x' 軸の単位ベクトル



を e'_x とすると $e_z \times b_z \neq 0$ のとき e'_x は次式で求まる。（例外扱いとなる $e_z \times b_z = 0$ のときは後ほど述べる。以下に続く話は全て $e_z \times b_z \neq 0$ のときについてであることに注意。）

$$e'_x = (e_z \times b_z) / \|e_z \times b_z\| \quad (\text{ただし } e_z \times b_z \neq 0) \quad (7-3-1)$$

●各回転角

○ 1 軸回転： z 軸によるこの回転は、2' 軸となる x' 軸に x 軸を重ねることが担当となる。よって回転角は x 軸と x' 軸の成す角 α となり、その範囲と余弦は次式のようにになる。

$$\cos \alpha = e_x \cdot e'_x \quad (0 \leq \alpha < 2\pi) \quad (7-3-2)$$

○ 2' 軸回転： x' 軸によるこの回転は、3'' 軸となる Z 軸に z 軸を重ねることが担当となる。よって回転角は z 軸と Z 軸の成す角 β となり、その範囲と余弦は次式のようにになる。

$$\cos \beta = e_z \cdot b_z \quad (0 < \beta < \pi) \quad (7-3-3)$$

○ 3'' 軸回転： Z 軸 (z'' 軸) によるこの回転は、2' 軸だった x' 軸を X 軸に重ねることが担当となる。よって回転角は x' 軸と X 軸の成す角 γ となり、その範囲と余弦は次式のようにになる。

$$\cos \gamma = e'_x \cdot b_x \quad (0 \leq \gamma < 2\pi) \quad (7-3-4)$$

【第7講】回転の表現 I

●回転行列による表示

intrinsic な回転となるので、前節[7-2-2]で行ったように Passive 変換による合成変換が自然な変換となる。 x 軸まわりの θ 回転変換の表示行列を $R_x(\theta)$ 等と表記すれば、Passive 変換の回転行列は

$$R_P^{Euler} = R_{z''}(\gamma)R_{x'}(\beta)R_z(\alpha) \quad (7-3-5)$$

となる。ここで各基底の変換に伴う行列の変換は以下ようになる。

$$R_{x'}(\beta) = R_z(\alpha)R_x(\beta)R_z^{-1}(\alpha), \quad R_{z''}(\gamma) = R_{x'}(\beta)R_z(\gamma)R_{x'}^{-1}(\beta) \quad (7-3-6)$$

3回の合成でも、前節と同様に相当する Active 変換による extrinsic な回転となる合成変換は行列の積の順が逆順となる。これは x 軸まわりの θ 回転変換を $f_x(\theta)$ 等と表記すれば、Passive 変換における基底変換の合成変換は $h^{-1} = f_z^{-1}(\gamma) \circ f_{x'}^{-1}(\beta) \circ f_z^{-1}(\alpha)$ として行われており、相当する線形変換の合成変換は $h = f_z(\alpha) \circ f_x(\beta) \circ f_z(\gamma)$ であり Active 変換による extrinsic な回転の表示行列は

$$R_A^{Euler} = R_z(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma) \quad (7-3-7)$$

として得られるからである。なお(7-3-5)式と、この(7-3-7)式の回転行列が等しいことは(7-3-6)式を代入して直接確かめることもできる。記号が煩雑になるので $R_{x'}(\beta) = X'_\beta$ 等略記すると

$$R_P^{Euler} = Z''_\gamma X'_\beta Z_\alpha (\times), \quad R_{x'}(\beta) = X'_\beta = Z_\alpha X_\beta Z_\alpha^{-1} (\star), \quad R_{z''}(\gamma) = Z''_\gamma = X'_\beta Z'_\gamma X'^{-1}_\beta (\star)$$

と書いて、 $Z'_\gamma = Z_\alpha Z_\gamma Z_\alpha^{-1}$ と $(\star)$ を $(\star)$ に代入すると

$$Z''_\gamma = X'_\beta Z'_\gamma X'^{-1}_\beta = (Z_\alpha X_\beta Z_\alpha^{-1})(Z_\alpha Z_\gamma Z_\alpha^{-1})(Z_\alpha X_\beta Z_\alpha^{-1})^{-1} = Z_\alpha X_\beta Z_\gamma Z_\alpha^{-1}(Z_\alpha X_\beta^{-1} Z_\alpha^{-1}) = Z_\alpha X_\beta Z_\gamma X_\beta^{-1} Z_\alpha^{-1}$$

となり、これと $(\star)$ を $(\times)$ に代入すると

$$R_P^{Euler} = Z''_\gamma X'_\beta Z_\alpha = (Z_\alpha X_\beta Z_\gamma X_\beta^{-1} Z_\alpha^{-1})(Z_\alpha X_\beta Z_\alpha^{-1})Z_\alpha = Z_\alpha X_\beta Z_\gamma = R_A^{Euler}$$

として確かめられた。

この回転行列を明示的に書き下すと、 $\cos \alpha = c\alpha$, $\sin \beta = s\beta$ 等の略記を用いて以下を得る。

$$R^{Euler} = \begin{bmatrix} c\alpha & c\gamma - s\alpha & c\beta & s\gamma & -c\alpha & s\gamma - s\alpha & c\beta & c\gamma & s\alpha & s\beta \\ s\alpha & c\gamma + c\alpha & c\beta & s\gamma & -s\alpha & s\gamma + c\alpha & c\beta & c\gamma & -c\alpha & s\beta \\ & s\beta & s\gamma & & s\beta & c\gamma & & c\beta & & \end{bmatrix} \quad (7-3-8)$$

●例外処理

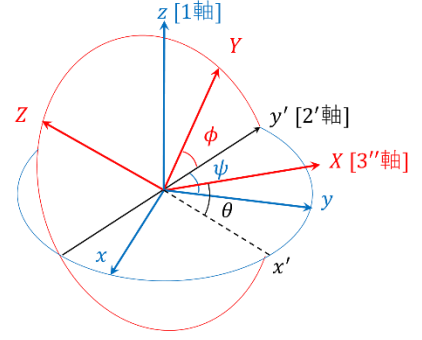
さて後回しにしていた「例外」について考察しよう。オイラー角の場合 z 軸と Z 軸が一致している、あるいは真逆を向いていることに相当し (7-3-1) 式に現れている。この場合両軸に垂直な平面上に x 軸と X 軸があるので、例えば x' 軸を X 軸として定義することで1回目の z 軸回転で x 軸と X 軸を一致させ、 z 軸と Z 軸が逆向きの場合は2回目の X 軸(= x' 軸)の π 回転を行う等の1回あるいは2回の回転で目的を達することができる。このように最終姿勢が特殊な例外姿勢である場合は、各回転角の定義自体が異なり、回転行列 (7-3-8) 式も異なることに注意を要する。

●バリエーション

回転軸を $z-x'-z''$ と選んだものが狭義のオイラー角であった。軸の選び方は前項で考察したように6通りあり、他の5通りを書き下せば $z-y'-z'', x-y'-x'', x-z'-x'', y-z'-y'', y-x'-y''$ となる。これらを合わせて6種類の(広義の)オイラー角として扱っている場合もあるので注意。

[7-3-3] Tait-Bryan 角

●定義：1-2'-3'' 軸として $z-y'-x''$ 軸を適用したものを Tait-Bryan 角という。図のように 2' 軸である y' 軸は、1 軸である z 軸と 3'' 軸である X 軸 (x'' 軸) のどちらとも直交する。その方向は z 軸と X 軸 との外積にて求まり、向きは $z \times X$ の正の方向となる。以下、基準座標系 xyz の標準基底を



$\{e_x, e_y, e_z\}$, 回転後の座標系 XYZ の正規直交基底を $\{b_x, b_y, b_z\}$,

y' 軸の単位ベクトルを e'_y とすると $e_z \times b_x \neq 0$ のとき e'_y は次式で求まる (例外扱いとなる $e_z \times b_x = 0$ のときは後ほど述べる。以下に続く話は全て $e_z \times b_x \neq 0$ の時についてであることに注意。)

$$e'_y = (e_z \times b_x) / \|e_z \times b_x\| \quad (\text{ただし } e_z \times b_x \neq 0) \quad (7-3-9)$$

●各回転角

○ 1 軸回転： z 軸によるこの回転は、2' 軸となる y' 軸に y 軸を重ねることが担当となる。よって回転角は y 軸と y' 軸の成す角 ψ となり、その範囲と余弦は次式のようにになる。

$$\cos \psi = e_y \cdot e'_y \quad (0 \leq \psi < 2\pi) \quad (7-3-10)$$

○ 2' 軸回転： y' 軸によるこの回転は、3'' 軸となる X 軸に x' 軸を重ねることが担当となる。よって回転角は x' 軸と X 軸の成す角 θ となり、その範囲と余弦は次式のようにになる。

$$\cos \theta = (e'_y \times e_z) \cdot b_x \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2) \quad (7-3-11)$$

○ 3'' 軸回転： X 軸 (x'' 軸) によるこの回転は、2' 軸だった y' 軸を Y 軸に重ねることが担当となる。よって回転角は y' 軸と Y 軸の成す角 ϕ となり、その範囲と余弦は次式のようにになる。

$$\cos \phi = e'_y \cdot b_y \quad (0 \leq \phi < 2\pi) \quad (7-3-12)$$

●回転行列による表示

intrinsic な回転となるので、前節[7-2-2]で行ったように Passive 変換による合成変換が自然な変換となる。 x 軸まわりの θ 回転変換の表示行列を $R_x(\theta)$ 等と表記すれば、Passive 変換の回転行列は

$$R_P^{TB} = R_{x''}(\phi) R_{y'}(\theta) R_z(\psi) \quad (7-3-13)$$

となる。ここで各基底の変換に伴う行列の変換は以下のようにになる。

$$R_{y'}(\theta) = R_z(\psi) R_y(\theta) R_z^{-1}(\psi), \quad R_{x''}(\phi) = R_{y'}(\theta) R_{x'}(\phi) R_{y'}^{-1}(\theta) \quad (7-3-14)$$

3回の合成でも、前節と同様に対応する Active 変換による extrinsic な回転となる合成変換は行列の積の順が逆順となる。これは x 軸まわりの θ 回転変換を $f_x(\theta)$ 等と表記すれば、Passive 変換における基底変換の合成変換は $h^{-1} = f_x^{-1}(\phi) \circ f_y^{-1}(\theta) \circ f_z^{-1}(\psi)$ として行われており、相当する線形変換の合成変換は $h = f_z(\psi) \circ f_y(\theta) \circ f_x(\phi)$ であり Active 変換による extrinsic な回転の表示行列は

$$R_A^{TB} = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi) \quad (7-3-15)$$

として得られるからである。なお (7-3-13)式と、この(7-3-15)式の回転行列が等しいことは(7-3-14)式を代入して直接確かめることもできる。記号が煩雑になるので $R_{y'}(\theta) = Y'_\theta$ 等略記すると

$$R_P^{TB} = X''_\phi Y'_\theta Z_\psi \quad (\times), \quad R_{y'}(\theta) = Y'_\theta = Z_\psi Y_\theta Z_\psi^{-1} \quad (\star), \quad R_{x''}(\phi) = X''_\phi = Y'_\theta X'_\phi Y'^{-1}_\theta \quad (\star)$$

【第7講】回転の表現 I

と書いて、 $X'_\phi = Z_\psi X_\phi Z_\psi^{-1}$ と (☆) を (★) に代入すると

$X''_\phi = Y'_\theta X'_\phi Y_\theta^{-1} = (Z_\psi Y_\theta Z_\psi^{-1})(Z_\psi X_\phi Z_\psi^{-1})(Z_\psi Y_\theta Z_\psi^{-1})^{-1} = Z_\psi Y_\theta X_\phi Z_\psi^{-1}(Z_\psi Y_\theta^{-1} Z_\psi^{-1}) = Z_\psi Y_\theta X_\phi Y_\theta^{-1} Z_\psi^{-1}$ となり、これと (☆) を (※) に代入すると

$$R_P^{TB} = X''_\phi Y'_\theta Z_\psi = (Z_\psi Y_\theta X_\phi Y_\theta^{-1} Z_\psi^{-1})(Z_\psi Y_\theta Z_\psi^{-1}) Z_\psi = Z_\psi Y_\theta X_\phi = R_A^{TB}$$

として確かめられた。

この回転行列を明示的に書き下すと、 $\cos \psi = c\psi$, $\sin \theta = s\theta$ 等の略記を用いて以下を得る。

$$R^{TB} = \begin{bmatrix} c\psi & c\theta & -s\psi & c\phi + c\psi & s\theta & s\phi & s\psi & s\phi + c\psi & s\theta & c\phi \\ s\psi & c\theta & c\psi & c\phi + s\psi & s\theta & s\phi & -c\psi & s\phi + s\psi & s\theta & c\phi \\ -s\theta & & & c\theta & s\phi & & & c\theta & c\phi & \end{bmatrix} \quad (7-3-16)$$

●例外処理

Tait-Bryan 角の場合 z 軸と X 軸が一致している、あるいは真逆を向いていることに相当し(7-3-9)式に現れる。この場合両軸に直交する平面上に y 軸と Y 軸があるので、例えば y' 軸を Y 軸として定義することで1回目の z 軸回転で y 軸と Y 軸を一致させさらに Y 軸 (= y' 軸) まわりの $\pm \frac{\pi}{2}$ 回転で達成させる等の、合わせて2回転による別処理を行えばよいことになる。

●バリエーション

Tait-Bryan 角の場合、代表とした回転軸を $z - y' - x''$ と選んだもの以外にも、 $z - x' - y''$ もよく使われているようである。軸の選び方は前項で考察したように6通りあり、他の4通りを書き下せば $x - y' - z''$, $x - z' - y''$, $y - z' - x''$, $y - x' - z''$ となる。なお6通りのオイラー角に6通りの Tait-Bryan 角も含めて12種類のオイラー角として扱っている場合もあるので、さらにさらに注意。

【7-3-4】ジンバルロック

オイラー角における例外状態のことを「回転角 β が $0, \pi$ のときは、(7-3-8)式が

$$\begin{bmatrix} c\alpha & c\gamma - s\alpha & s\gamma & -c\alpha & s\gamma - s\alpha & c\gamma & 0 \\ s\alpha & c\gamma + c\alpha & s\gamma & -s\alpha & s\gamma + c\alpha & c\gamma & 0 \\ 0 & & & 0 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \gamma) & -\sin(\alpha + \gamma) & 0 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ となり回転の自由度が失われ、これをジンバルロックという。}$$

というような説明もあるが、導出および例外処理の内容から分かるようにそもそもこのとき各回転角や(7-3-8)式自体が別処理での異なる定義となり、Tait-Bryan 角の場合も「回転角 θ が $\pm \frac{\pi}{2}$ のとき」にあたり、同様に回転角や(7-3-16)式は異なる定義となる。また因果関係が逆で自由度が失われるのではなく、1・2回転となる少ない自由度で到達できる特殊な場合に相当する。場合分けによる別処理も必要となることを理解したうえで使うべきともいえるがいずれにしても、このような場合分けが必要となること自体は結構(かなり)やっかいなことではあり、根本原因としては3つの回転角で構成されるパラメータ領域で3次元回転全体を表そうとしたとき、それらがトポロジ的に同等でないことの「しわ寄せ」からきている。では3次元回転全体の大域的な構造とはどういったものなのだろうか？これは次節にて調べることになる。

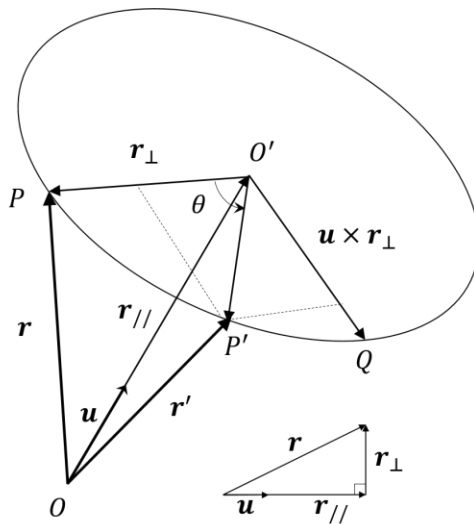
【7-4】回転ベクトル

【7-4-1】定義とロドリゲスの回転公式

前講[6-5-1]で剛体回転におけるオイラーの定理を学んだ。その証明から分かるように任意の3次元回転行列が固有値1の実固有ベクトルをもち、全ての3次元回転は回転軸とその周りの回転角で表すことができることを意味する。このことを素直に定式化したものが以下の回転ベクトルとなる。

●定義：3次元空間の任意の回転に対し、回転により右ねじが進む向きを正とした回転軸をベクトル ω の方向とし、弧度法による回転角をその大きさとする ω を**回転ベクトル**という。定義より回転角 $\theta = \|\omega\|$ であり、 $\theta \neq 0$ の時の ω の向きの単位ベクトルを $u = \omega/\|\omega\|$ と定義する。

●回転公式



図のように回転ベクトルにより3次元上の任意の点 P （位置ベクトル r ）が点 P' （位置ベクトル r' ）に変換される場合を考える。点 P から回転軸の直線上に下ろした垂線の足を点 O' とすると、 $\overrightarrow{O'P}$, $\overrightarrow{O'P'}$ は共に回転軸と直交し、 $\overrightarrow{O'P}$, $\overrightarrow{O'P'}$ が張る面（回転面）も回転軸と直交する。 $r = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ であるが、 $r_{//} = \overrightarrow{OO'}$, $r_{\perp} = \overrightarrow{O'P}$ とすると u は単位ベクトルなので

$$r_{//} = (u \cdot r)u \quad (7-4-1)$$

と書いて、 $r = r_{//} + r_{\perp}$ なので以下を得る。

$$r_{\perp} = r - (u \cdot r)u \quad (7-4-2)$$

さらに回転面上で点 P を $\pi/2$ だけ回した先の点を Q とすると、 $\overrightarrow{O'Q}$ は u と $r_{\perp}$ とも直交するので、その向きは図

から u と $r_{\perp}$ の外積、 $u \times r_{\perp}$ と同じである。その長さは $r_{\perp}$ の長さと等しく、 u が単位ベクトルかつ $r_{\perp}$ と直交することから $\|u \times r_{\perp}\|$ と同じとなるので、 $\overrightarrow{O'Q} = u \times r_{\perp}$ となることが分かる。

$\overrightarrow{O'P'} = \cos \theta \overrightarrow{O'P} + \sin \theta \overrightarrow{O'Q}$ となることから、点 P' を指す位置ベクトル r' は

$$r' = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = r_{//} + \cos \theta r_{\perp} + \sin \theta u \times r_{\perp}$$

となり、(7-4-1)式、(7-4-2)式を代入すると

$$= (u \cdot r)u + \cos \theta \{r - (u \cdot r)u\} + \sin \theta u \times \{r - (u \cdot r)u\}$$

となる。これを整理して

$$r' = \cos \theta r + (1 - \cos \theta)(u \cdot r)u + \sin \theta u \times r \quad (7-4-3)$$

を得る。この式を**ロドリゲスの回転公式（ベクトル表示）**という。

●回転の合成

残念ながら回転ベクトルによる回転の合成は、各回転ベクトルの和や積のような単純な形で表すことはできない。回転行列形式で合成するか、次講のクォータニオンの合成にならうことになる。

[7-4-2] 回転行列による表示

(7-4-3)式： $\mathbf{r}' = \cos \theta \mathbf{r} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{u} \times \mathbf{r}$ を線形変換の行列表示に書き直す。

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} x'_i &= \cos \theta x_i + (1 - \cos \theta) \left(\sum_{j=1}^3 u_j x_j \right) u_i + \sin \theta \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ikj} u_k x_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ \cos \theta \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) u_i u_j - \sin \theta \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k \right\} x_j \end{aligned}$$

と書けるので

$$R_{ij} = \cos \theta \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) u_i u_j - \sin \theta \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k \quad (7-4-4)$$

が回転行列となる。これを成分ごとに行列表記で書き下すと、

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) u_1^2 & (1 - \cos \theta) u_1 u_2 - \sin \theta u_3 & (1 - \cos \theta) u_1 u_3 + \sin \theta u_2 \\ (1 - \cos \theta) u_2 u_1 + \sin \theta u_3 & \cos \theta + (1 - \cos \theta) u_2^2 & (1 - \cos \theta) u_2 u_3 - \sin \theta u_1 \\ (1 - \cos \theta) u_3 u_1 - \sin \theta u_2 & (1 - \cos \theta) u_3 u_2 + \sin \theta u_1 & \cos \theta + (1 - \cos \theta) u_3^2 \end{bmatrix} \quad (7-4-5)$$

この(7-4-4)式、(7-4-5)式を**ロドリゲスの回転公式 (行列表示)** という。

$\mathbf{u}$ を標準基底の $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とすれば各座標軸周りの回転行列に帰着することがわかる。

[▼C] 演習：実際に回転行列であることを確かめよう。(7-4-4)式とその転置行列との積をとると

$$\begin{aligned} (R^T R)_{ij} &= \sum_{k=1}^3 R_{ik}^T R_{kj} = \sum_{k=1}^3 R_{ki} R_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\{ \cos \theta \delta_{ki} + (1 - \cos \theta) u_k u_i - \sin \theta \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{kil} u_l \right\} \left\{ \cos \theta \delta_{kj} + (1 - \cos \theta) u_k u_j - \sin \theta \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{kjm} u_m \right\} \\ &= \cos^2 \theta \delta_{ij} + \cos \theta (1 - \cos \theta) u_i u_j - \sin \theta \cos \theta \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ijm} u_m \\ &\quad + \cos \theta (1 - \cos \theta) u_j u_i + (1 - \cos \theta)^2 u_i u_j - \sin \theta (1 - \cos \theta) \sum_{m,k=1}^3 \varepsilon_{kjm} u_k u_i u_m \\ &\quad - \sin \theta \cos \theta \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jil} u_l - \sin \theta (1 - \cos \theta) \sum_{l,k=1}^3 \varepsilon_{kil} u_l u_k u_j + \sin^2 \theta \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{kil} u_l \varepsilon_{kjm} u_m \\ &= \cos^2 \theta \delta_{ij} + (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) u_i u_j + \sin^2 \theta \sum_{l,m=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) u_l u_m \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \delta_{ij} + (1 - \cos^2 \theta) u_i u_j - \sin^2 \theta u_i u_j \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

となり、確かに R は3次の直交行列である。また(7-4-4)式あるいは(7-4-5)式は $\theta \rightarrow 0$ にて連続的に単位行列に移行することにより行列式の値は+1 となることがわかる。

以上により R は回転行列となることが確かめられた。

[7-4-3] 回転行列の固有値・固有ベクトル

3 次の回転行列の固有値・固有ベクトルを改めて確認してみよう。一般の 3 次正方行列 A の固有
多項式は (6-3-17) 式 $g(\lambda) = -\{\lambda^3 - \text{tr}(A)\lambda^2 + (\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \tilde{a}_{33})\lambda - \det(A)\}$ だった。これに回転
行列を当てはめるとまず $\det(R) = +1$ となる。次に $\tilde{r}_{11}$ について、回転行列が正規直交基底
を列ベクトルにもつので余因子 $\tilde{r}_{11} = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)_1$ と基底の外積 $\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3$ の第 1 成分と
なり、正規直交基底なので $\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1$ でもあることから、 $\tilde{r}_{11} = r_{11}$ となることがわかる。

$\tilde{r}_{22}, \tilde{r}_{33}$ にも同様のことがいえ $\tilde{r}_{11} + \tilde{r}_{22} + \tilde{r}_{33} = \text{tr}(R)$ となり $g(\lambda) = -\{\lambda^3 - \text{tr}(R)\lambda^2 + \text{tr}(R)\lambda - 1\}$
を得る。これを式変形して一般の 3 次回転行列の固有多項式は

$$g(\lambda) = -(\lambda - 1)\{\lambda^2 - (\text{tr}(R) - 1)\lambda + 1\} \quad (7-4-6)$$

となり、オイラーの定理で得たように固有値のひとつは $+1$ であることがわかる。

さらに任意軸周りの回転として確かめる。回転行列である (7-4-5) 式から $\text{tr}(R)$ を求めると
 $\text{tr}(R) = 3 \cos \theta + (1 - \cos \theta)(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 2 \cos \theta + 1$ を得て、固有方程式は

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1) = 0 \quad (7-4-7)$$

このうち 2 次方程式 $\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$ の部分は、[6-2-2] 例 4) で求めた 2 次の回転行列

$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ の固有方程式そのものとなっていることに注意。従って解である固有値は、

$$\lambda = +1, \quad \lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta} \quad (7-4-8)$$

となる。また回転行列 R である (7-4-4) 式と回転軸である $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ との積 $R\mathbf{u}$ は

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij} u_j = \cos \theta u_i + (1 - \cos \theta) u_i \sum_{j=1}^3 u_j u_j - \sin \theta \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k u_j = u_i$$

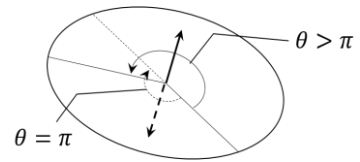
となり、確かに $\mathbf{u}$ は固有値 1 の固有ベクトルとなっていることがわかる。

[7-4-4] 3 次元回転の大域的な構造

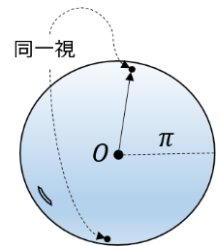
回転ベクトルはシンプルなので、パラメータ領域を調べることで 3 次元回転全体の大域的な構造を
調べることができるだろう。まずは 3 次元回転に 1 対 1 に対応するパラメータ領域を定めよう。

回転軸の方向を指定しその周りに回転させる際に回転角が π を超
える場合は、軸の向きが真逆の場合の回転角 π 以下の回転の結果
と重なってしまう。従って 3 次元回転と 1 対 1 の関係を作るには

回転角 θ の範囲を $0 \leq \theta \leq \pi$ とするのが自然という事になる。



任意の向きの回転ベクトルの始点を原点とし、回転角 θ の範囲、従ってベクト
ルの長さの範囲を $0 \leq \theta \leq \pi$ とした場合の各回転ベクトルが指す点の集合を考
える。この集合は原点を中心とした半径 π の球体となり、この球内の各点それ
ぞれが、ひとつの 3 次元の回転に相当することになる。ただし回転角が π とな
る球の表面の各点に関しては、原点を挟んだ真反対側の球面の点である対蹠点

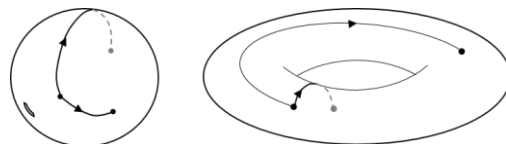


(たいせきてん、たいしよてん) と同一の回転に相当するため、各対蹠点同士を同一視することで
3 次元回転全体と 1 対 1 に対応したパラメータ領域を得る事となる。注意すべきは、この同一視さ

【第7講】回転の表現 I

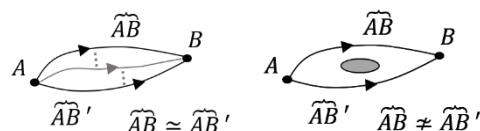
れた各対蹠点およびその球内周辺は3次元的になめらかに繋がっており、単に回転角が π になっただけで球内の他の点同様なんな特別な点ではないということで、2次元回転でいえば回転角 θ を表す区間 $[-\pi, \pi]$ の両端を同一視することに相当し、3次元回転に1対1に対応したパラメータ領域として構成する際の都合でしかないということである。いずれにしても、このように3次元回転全体の大域的な「つながり具合」は少々複雑なことになっていることがわかる。

この「つながり具合」を理解するためにまず右図のような2次元曲面である球面とトーラス面の違いを考えてみよう。小さなクモが曲面の一点から出発して曲面上を「蜘蛛の糸」を垂らしながら移動することを想像してほしい。このとき出発点と到着点は糸で「つながる」ことを示している。クモは曲面上を自由に移動できるとし、曲面上の全ての点に移動できた場合、つまり曲面上の全ての点が「つながった」場合、この曲面は**連結**であるという。曲面として球面とトーラス面は、どちらもそれぞれ連結であることは、直観的にも分かると思う。



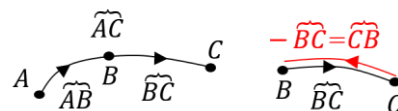
設定上この糸は伸縮自在だが決して切れず、出発点と最終的な到着点は固定されるがそれ以外は曲面上を自由に動かせるとしよう。ただし曲面から浮かせたり潜らせたりはできないということで。出発点 A と到着点 B をある経路でつないだものを**道**と呼んで、ここでは道 $\widehat{AB}$ と書くことにしよう。別の経路の道 $\widehat{AB}'$ に対して途中の糸を連続的に動かして道 $\widehat{AB}$ に変形できる場合、今は「つながり具合」

を調べているので この2つの道を同一視して $\widehat{AB} \simeq \widehat{AB}'$



と書くことにしよう⁵¹。もし $\widehat{AB}$ と $\widehat{AB}'$ で囲まれた中に「穴」が開いていれば「穴」に引っかかって $\widehat{AB}'$ を連続的に $\widehat{AB}$ に変形することはできない。つまりつながってはいるけど、単純なつながり方ではないことを知ることができる。ある曲面において、出発点 A を固定し、曲面上の任意の点 B を到着点として作った道 $\widehat{AB}$ に対して、別のどんな道 $\widehat{AB}'$ であっても $\widehat{AB}$ に一致させることができるとき、その曲面を**単連結**であるという。曲面が単連結でない場合は、どこかに「穴」が開いているなど、単純な連結ではないということになる。判別方法がやや複雑なので改良しよう。

点 B を新たな出発点とした到着点 C への道 $\widehat{BC}$ と道 $\widehat{AB}$ の合成を、 $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$ として**道の和**を定義する。また $\widehat{BC}$



を逆向きにつないだ道を $-\widehat{BC}$ と書いて $-\widehat{BC} = \widehat{CB}$ と定義し、**道の差**を $\widehat{AC} - \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$ として定義する。これは $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$ の $\widehat{BC}$ を左辺に「移項」した式、 $\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$

⁵¹ ホモトピーとよばれるトポロジーの概念のひとつ。ホントはこんないい加減な定義や記述の仕方ではないことに注意！注意！（怒られるw）ま、エッセンスを伝えと、こんな感じだということ。

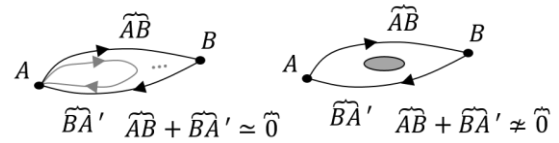
と解釈できる。また $\vec{0} = \vec{BC} - \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{CB}$ として $\vec{0}$ を定義する。これは B から C まで移動し、同じ経路で逆向きに B まで戻ってきた場合、B から動かないこと ($\vec{0}$) に等しい、あるいは戻ってきた B にて糸を全て回収して道をゼロにできる

ことと解釈できる。

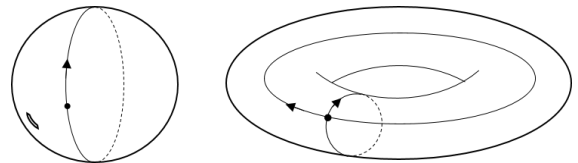
以上をもとに、 $\vec{AB} \approx \vec{AB}'$ を式変形した

$\vec{AB} - \vec{AB}' = \vec{AB} + \vec{BA}' \approx \vec{0}$ という式は、A を出発し

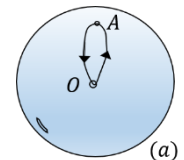
て任意の点 (B) まで移動し、そこから任意の違う経路で A まで戻ってきたとき、出発点かつ到着点 A で「糸」を全て回収できることを意味しその場合は単連結であり、「穴」等に引っかかって回収できない場合は単連結ではないといえる。



この新たな方法により球面とトーラス面で考えると、球面は連結かつ単連結、トーラス面は連結だが単連結ではないということ、さらにトーラスの場合は引っかかりがトーラスの胴周り、トーラスの「穴」周りの2種類であること、当然ながらそのどちらも何回転させても糸は回収できないこともわかる。

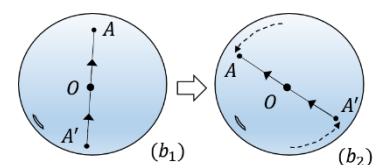


道具が用意できたので、3次元回転を表す球体の場合を考えよう。まず中心から出発したクモは球内および球面のどこにでも移動できるので、この3次元回転を表す球体は連結であるということがわかる。次に図の (a) は球の中心 O を出発して球面の点 A に到達し引き返して中心に戻ってきた場合を示す。この場合は明



らかに糸の全てを回収できる。またこの球体は各点がそれぞれ3次元回転を表していたので、各点はある物体の回転後の姿勢を表していると考えることもでき、球の中心は基準の姿勢であり、そこから動き出すと基準の姿勢からじわじわと各点が示す姿勢へ回転していくことに相当する。従って (a) は点 A が z 軸の正の方向だとすれば基準の姿勢から z 軸から少しずれた軸を中心に回りだしてじわじわと回転軸を変えながら回転を続け、ちょうど z 軸まわりに π 回転した姿勢 (点 A のこと) になったとき逆向きに回りだし、最終的に基準の姿勢に戻るという「回転のモーション (アニメーション) データ」に相当する。糸を回収できることは、この「モーションデータ」を連続的に無回転まで変形させることができることに相当する。あるいは単連結の最初の判定法である、点 A にたどり着く2種類の道を他方に連続的に変形できることは、点 A が示す姿勢への回転の2種類の「モーション」を連続的に他方に変形できることを意味する。

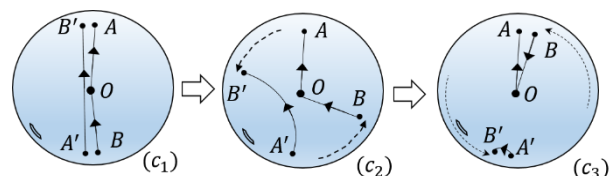
さて、図の (b₁) は中心から出発し球面の点 A に到達、対蹠点の A' を通じて中心に戻る場合を示しているが、この場合は糸が「引っかかって」回収することができない。(b₂) のように点 A を動かして外そうとしても対蹠点である A' も同時に動き、糸は抜けようがないこ



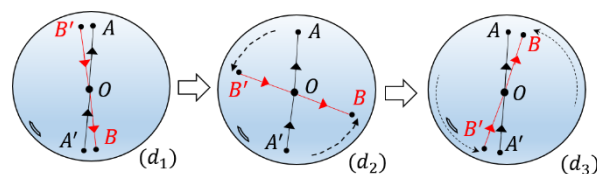
【第7講】回転の表現 I

とになる。このことは3次元回転全体のつながり方は連結だが単連結ではないということを示している。 (b_1) は言うなれば基準の姿勢から z 軸まわりに π 回転し、そのままの向きに回転を続けて最終的に 2π 回転して基準姿勢に戻ることを意味している。つまり z 軸まわりの一回転だ。このことは一回転する「モーション」は連続的に無回転に変形できない、あるいは半回転する「モーション $\widehat{OA}$ 」は逆向きに半回転する「モーション $\widehat{OA'}$ 」に連続的に変形できないことを意味している。原理的にできないのだ。

さてさて話はまだ続く。図の (c_1) は中心から出発し球面の点 A に到着、対蹠点の A' を通じて中心付近に戻りさらに球面の A のすぐそばの B' まで行き、対蹠点の B を通じて中心に戻ってくる



という、つまり2回転させることを示している。1回転のときと何が違うのだろうか？点 A, A' の組はそのまま、 B, B' の組を球面に沿って動かしていくと図の (c_2) のようになる。原点 O で余った糸を回収しながら進めていくと、図の (c_3) のように B' と A' 、 B と A がそれぞれ近づいていき、やがて同時に1点になったら後は最初の図の (a) と同じとなり、なんと糸を全て回収できてしまうのだ。つまり1回転する「モーション」は連続的に無回転に変形できなかったが、2回転すればできることを意味する。また互いに逆向きに半回転する「モーション」は連続的に相手に変形できなかったが、互いに逆向きに1回転するならできるという事を意味している (d_1, d_2, d_3) 。



このような性質を表すデモンストレーションとして有名なのが The plate trick あるいは The belt trick とよばれるもので、言葉で説明するより動画を見たほうがわかりやすいので是非検索して見て頂きたい。いずれも3次元回転の「ねじれ」が2回転で解消される様子を示す。

話を戻して、さらに回転数を増やすと同様に奇数回の回転なら最後の1回の回転分の糸は回収できないが、偶数回の回転なら全て回収できることになる。トーラスの胴周りや穴に対する場合の何度回してもダメなのとは異なる性質となる。3次元回転全体はこうに結構複雑な大域的構造を持っており、回転を表現する際は、そのパラメータ領域が全体としてこの構造にうまく当てはまる（トポロジ的に同等である：同相である）ことが望ましいことになる。

回転行列はうまく一対一に当てはまるが成分の数がだいぶ冗長。オイラー角/Tait-Bryan角は一部を場合分けして別処理する必要がある。回転ベクトルは一対一に対応しパラメータ数も必要最小限だが合成に難あり。ある意味どれも一長一短ともいえるなか、次講にて真打ち登場となる。

【7-5】付録 1 : 回転変換に関する 2 証明

写像 $f: E^3 \rightarrow E^3$ が $\forall x, y \in E^3$ に対して $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \|f(x)\| = \|x\|$ を満たすとき

- f は内積を不変に保つ $\leftarrow (7-2-4)$

【証明】 $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$ において

$$\text{左辺: } \|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2f(x) \cdot f(y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2f(x) \cdot f(y)$$

$$\text{右辺: } \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y$$

よって $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ がいえ題意は示された。 ■

- f は線形変換である $\leftarrow (7-2-5)$

$$\begin{aligned} \text{【証明】 } \|f(x+y) - \{f(x) + f(y)\}\|^2 &= \{f(x+y) - f(x) - f(y)\} \cdot \{f(x+y) - f(x) - f(y)\} \\ &= \|f(x+y)\|^2 + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2f(x) \cdot f(x+y) - 2f(y) \cdot f(x+y) + 2f(x) \cdot f(y) \\ &= \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot (x+y) - 2y \cdot (x+y) + 2x \cdot y \\ &= \|x+y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y) = 0 \end{aligned}$$

よって $f(x+y) - \{f(x) + f(y)\} = 0$ すなわち $f(x+y) = f(x) + f(y)$ がいえる。

$$\begin{aligned} \text{また } \forall k \in \mathbb{R} \text{ に対し } \|f(kx) - kf(x)\|^2 &= \|f(kx)\|^2 + k^2\|f(x)\|^2 - 2kf(x) \cdot f(kx) \\ &= \|kx\|^2 + k^2\|x\|^2 - 2kx \cdot (kx) = 0 \end{aligned}$$

よって $f(kx) - kf(x) = 0$ すなわち $f(kx) = kf(x)$ がいえる。

以上により題意は示された。 ■

【7-6】[▼A,C]付録 2 : 3 次回転行列となる行列指数関数

前講の付録にてオイラーの公式の行列表現を導き、行列指数関数として表された左辺が、右辺で構成される 2 次の回転行列として解釈できたのだった。

$$e^{\theta I} = \cos \theta E + \sin \theta I = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-6-1)$$

同じようなことが 3 次の回転行列でできないか？というのが本付録の主題となる。眺めてみると、ネイピア数 e の肩に乗る行列がポイントになりそうだ。左辺は定義から、ランダウの記号を用いると $e^{\theta I} = E + \theta I + O(\theta^2)$ となり、右辺は $\cos \theta = 1 + O(\theta^2), \sin \theta = \theta + O(\theta^3)$ より

$$E + \theta I + O(\theta^2) = \begin{bmatrix} 1 + O(\theta^2) & -\theta + O(\theta^3) \\ \theta + O(\theta^3) & 1 + O(\theta^2) \end{bmatrix} = E + \theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + O(\theta^2) \quad (7-6-2)$$

として行列 I が得られる。あとは、この行列による行列指数関数が実際に右辺となるかどうか？ということ、3 次の任意軸周りの回転行列である、(7-4-4)式(7-4-5)式について試してみよう。

$$R_{ij} = \cos \theta \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) u_i u_j - \sin \theta \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k = \delta_{ij} - \theta \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k + O(\theta^2) \quad (7-6-3)$$

これと (7-6-2) 式を比べてみると、行列の候補としては

$$\Omega_{ij} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k, \quad \text{or} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-6-4)$$

【第 7 講】回転の表現 I

これを用いて行列指数関数

$$e^{\theta\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \theta^n \Omega^n \quad (7-6-5)$$

を考えてみよう。この関数が 3 次の回転行列になるのかどうかを調べるため、まず Ω^n を求める。

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k \\ (\Omega^2)_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \left(-\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ikl} u_l \right) \left(-\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{kjm} u_m \right) = -\sum_{l,m,k=1}^3 \varepsilon_{kil} \varepsilon_{kjm} u_l u_m \\ &= -\sum_{l,m=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_l u_m = -\delta_{ij} + u_i u_j \\ (\Omega^3)_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \left(-\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ikm} u_m \right) (-\delta_{kj} + u_k u_j) = \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ijm} u_m - \sum_{k,m=1}^3 \varepsilon_{ikm} u_k u_m u_j = -\Omega_{ij} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} e^{\theta\Omega} &= E + \theta\Omega + \frac{1}{2!} \theta^2 \Omega^2 - \frac{1}{3!} \theta^3 \Omega - \frac{1}{4!} \theta^4 \Omega^2 + \frac{1}{5!} \theta^5 \Omega + \frac{1}{6!} \theta^6 \Omega^2 - \dots \\ &= E + \Omega^2 - \left(1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \frac{1}{6!} \theta^6 + \dots \right) \Omega^2 + \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots \right) \Omega \\ &= E + (1 - \cos \theta) \Omega^2 + \sin \theta \Omega \\ \therefore (e^{\theta\Omega})_{ij} &= \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) (-\delta_{ij} + u_i u_j) + \sin \theta \left(-\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k \right) \\ &= \cos \theta \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) u_i u_j - \sin \theta \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_k = R_{ij} \end{aligned} \quad (7-6-6)$$

として、確かに (7-4-4) 式の回転行列を得た。

(7-6-4) 式の行列 $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$ を、回転軸を表す単位ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ との

「積」として表すと、

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-6-7)$$

に対して、

$$\Omega = u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3 \quad (7-6-8)$$

と書ける。

勘が良い読者ならお気づきと思うが、回転軸のベクトル $\mathbf{u}$ を標準基底とすると、これは各座標軸周りの回転行列を表し、例えば $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 1)$ とすれば、 z 軸まわりの θ 回転として

$$e^{\theta L_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-6-9)$$

を得る。 L_1, L_2, L_3 には (7-6-1) 式である 2 次の回転行列指数関数の際の行列 I が埋め込まれているのがわかる。実は回転行列だけでなく、正則となる線形変換の表示行列も行列指数関数として表すことができ、解析学や群論も応用することで線形代数の世界がより深く理解できるよう発展した。そのような発展をリー群（およびリー環）という。ここではその入り口をちょっと覗いてみた。さてさて、話はまだまだ続く。最終回として次講の付録にて行列の代わりにクォータニオンをネイピア数の肩に乗せ、オイラーの公式のクォータニオン版を導き、具体的な応用をみることになる。

【第8講】回転の表現 II

【8-1】はじめに

本講では、4種の3次元回転の表現の最後としてクォータニオンについて学ぶ。クォータニオンは日本語では四元数（しげんすう）と訳されるもので、1843年にハミルトンにより発見された複素数を拡張した代数体系であり、3次元の回転の表現としても多くの利点を備えている。

その性質から特に計算機を用いる場合にも他の表現手法に比べ優位な点が多く、近年 宇宙機を始め、3DCGやCV、ロボット工学等々さまざまな分野で応用されている。一方で他の表現手法に比べると抽象的でその本質（4次元空間に埋め込まれた3次元回転）が捉えづらい面も否めない。本講では、拡張の元になった大きさ1の複素数の積による複素平面内での回転の復習から始め、ハミルトンによる発見に至るまでの過程⁵²をたどる事でクォータニオンを導入し、その性質を分かりやすく解説する。

●おさらい

任意の複素数 $(x + iy)$ に大きさ1の複素数 $(\cos \theta + i \sin \theta)$ を掛ける事は複素平面内での θ 回転を表していた。実際

$$x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$$

この式で、1 と i をベクトルの基底としてみると、

$$x \rightarrow x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y \rightarrow y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

という線形変換と見ることができて、行列形式で書けば

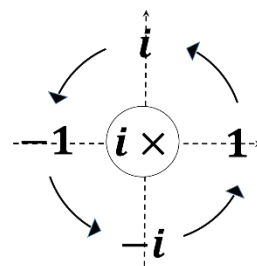
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

となり、すなわち複素平面である $1-i$ 平面（ $x-y$ 平面）での θ 回転を表している事がわかる。

この本質は、 i を掛けるという事：基底 1 と i との積の閉じた代数が、 $1-i$ 平面内で一回りする回転に相当していることにある。

$$\begin{aligned} i \times 1 &= i, & i \times i &= -1 \\ i \times (-1) &= -i, & i \times (-i) &= 1 \end{aligned}$$

（ $1-i$ 平面の $\frac{\pi}{2}$ 回転： $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ に相当する）



【8-2】クォータニオンの導入：ハミルトン劇場

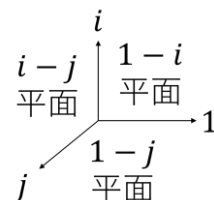
【8-2-1】拡張複素数で複素（3次元）空間を回したい

ハミルトンは複素数を拡張して、虚数単位 i の他に独立な別の虚数単位 j を導入

⁵² あくまで筆者の想像（妄想）による過程であり、史実に基づいたものではありません。

【第8講】回転の表現 II

($i^2 = j^2 = -1$, $\bar{i} = -i, \bar{j} = -j$)、 $1, i, j$ の3つの元で $1-i$ 平面、 $1-j$ 平面、 $i-j$ 平面それぞれの回転を表現できないか？と考えた（つまり複素平面を複素空間に拡張できないか？ってこと）。

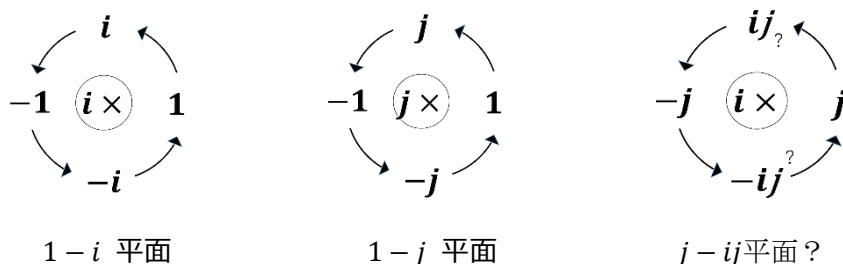


「独立な異なる虚数単位 i, j 」に違和感がある人もいると思う。新しい代数として拡張して
 いているので、うまく拡張できさえすればあとは「慣れ」ではあるのだが「複素数」を
 以下のように解釈することで別の虚数単位を導入するという拡張も違和感が減るかもしれない。
 おさらい⁵³：2行2列の行列 $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を考えると（この行列は上のおさらいで出てきた2次の
 回転行列で $\theta = \frac{\pi}{2}$ としたものでもあることに注意）、 $I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$ (E は単位行列)となる
 （つまり2乗して-1）。また行列 $Z = xE + yI$ ($x, y \in \mathbb{R}$) を考えると、 $Z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ なので、
 $Z = 0$ となるのは $x = y = 0$ のときのみ（つまり E と I は線形独立）。この行列 $Z = xE + yI$ に対し
 E を 1 , I を i に対応させることで、複素数 $z = x + iy$ に対応させる事が可能となる。

ここでさらに別の行列 例えば $J = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$ を考えると、 $J^2 = -E$ を満たし、この J を含め
 E, I, J が線形独立であることは容易に確かめられる。このような「複素数の拡張」（上の J の事）
 がうまく行くかどうかは別にして「違和感」のない表現もやろうと思えば可能ではある。

以下、ハミルトンがクォータニオンを発見するまでの過程⁵⁴をたどってみよう。

ハミルトン： $1-i$ 平面と $1-j$ 平面の回転は当然できた。



でも $i-j$ 平面がうまくいかない。 $i \times j$ の扱いがどうにもこうにも…

とりあえず $i \times j$ を ij として回るようにはできたけど⁵⁵、この ij って本来 i にならないと
 $i-j$ 平面にはならない。でも $ij = i$ としてしまうと i を掛けても $-j$ にならずに -1 と
 なってうまく回らない。どうしたものか・・・

（ちなみに後に別の数学者により、このような $1, i, j$ による「複素数の拡張」（三元数に相当）
 は、うまく行かない事が証明されている。）

⁵³ 詳細は第5講 付録2 参照

⁵⁴ くだいですが、筆者による想像（妄想）です

⁵⁵ $i \times ij = i^2 j = -j$ ってこと

[8-2-2] 4次元？ マジか4次元？

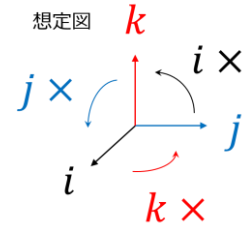
ある日運河のほとりを歩いている時（実話⁵⁶）にひらめいた！

もう一つ虚数単位 k を導入して $ij = k$ としてみよう。実数単位 1 と

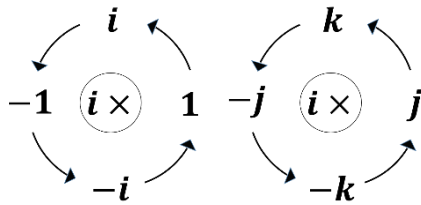
虚数単位 i, j, k で4次元になるけど、うまくいくかも・・・

回転面は $1-i$, $1-j$, $1-k$ 平面, $i-j$, $j-k$, $k-i$ 平面の6面になるのか。

3次元回転をうまく取り出すには、 $i-j$, $j-k$, $k-i$ 平面の回転がこんな風になるといいのかな？



- i を掛けると？：想定図のように $j-k$ 平面を回すため、 $ij = k$ としてみよう



$1-i$ 平面 $j-k$ 平面

うまく回すには、 $ij = k$, $ik = -j$

お、 $j-k$ 平面だけでなく $1-i$ 平面も同時に回るんだ。

そりゃそうか。しかもそれぞれの平面内で回りそうだ。

角度 θ の場合として「大きさ」1 の $(\cos \theta + i \sin \theta)$ を

4次元に拡張した「複素数」 $(w + ix + jy + kz)$ に

($i^2 = -1$, $ij = k$, $ik = -j$ に注意して) 掛けてみよう。

$$\begin{aligned}
 w' + ix' + jy' + kz' &= (\cos \theta + i \sin \theta)(w + ix + jy + kz) \\
 &= w \cos \theta + ix \cos \theta + jy \cos \theta + kz \cos \theta + iw \sin \theta - x \sin \theta + ky \sin \theta - jz \sin \theta \\
 &= (w \cos \theta - x \sin \theta) + i(w \sin \theta + x \cos \theta) \\
 &\quad + j(y \cos \theta - z \sin \theta) + k(y \sin \theta + z \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{8-2-1}$$

確かに $w-x$ 平面 ($1-i$ 平面：下から2行目)

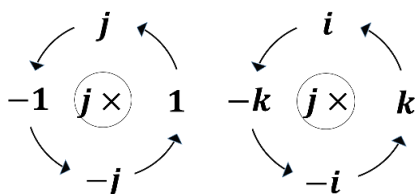
と $y-z$ 平面 ($j-k$ 平面：下から1行目) が

それぞれの平面内で同時に別々に回っている⁵⁷。

つまり、こういうこと

$$\begin{bmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- j を掛けると？：想定図のように $k-i$ 平面を回すため、 $jk = i$ としてみよう



$1-j$ 平面

$k-i$ 平面：うまく回すには、 $jk = i$, $ji = -k$

およ。さっきの i を掛けて $j-k$ 平面をうまく回す条件

$ij = k$ と合わせると、 $ij = k$, $ji = -k$ となって、なんと

積は可換じゃなくなる！マジか！まあしょうがないか…。

⁵⁶ 運河を渡る橋に $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ と刻んだとの事

⁵⁷ ちなみに4次元では2本の直交する基底で張られる(回転)面を、基底を共有せずに2面とることができる(3次元ではできない)。この場合 $1-i$ 平面と $j-k$ 平面は原点のみで交わっている事に注意。

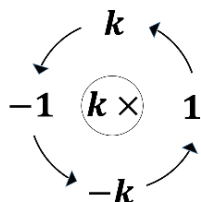
【第8講】回転の表現 II

角度 θ だと同様に：

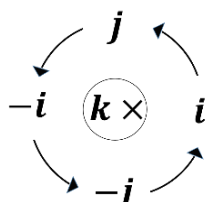
$$(\cos \theta + j \sin \theta)(w + ix + jy + kz) = (w \cos \theta - y \sin \theta) + j(w \sin \theta + y \cos \theta) + k(z \cos \theta - x \sin \theta) + i(z \sin \theta + x \cos \theta) \quad (8-2-2)$$

ん、これも同時に別々に回っている。

- 残り k を掛けると？：想定図のように $i-j$ 平面を回すため、 $ki = j$ としてみよう



$1-k$ 平面



$i-j$ 平面：うまく回すには、 $ki = j, kj = -i$

これも角度 θ だと同様に：

$$(\cos \theta + k \sin \theta)(w + ix + jy + kz) = (w \cos \theta - z \sin \theta) + k(w \sin \theta + z \cos \theta) + i(x \cos \theta - y \sin \theta) + j(x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (8-2-3)$$

- とりあえず分かったこと

虚数単位 i, j, k に対して積を $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$ として

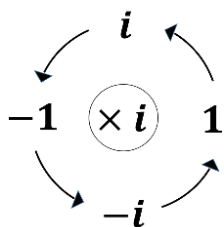
$w + ix + jy + kz$ に左から $\cos \theta + i \sin \theta$ を掛けると、 $1-i$ 平面、 $j-k$ 平面が同時に θ 回転する。

j, k で回しても同様。このままだと $1-i$ 平面で余計な回転が発生し、最終的に実現したい純粋な 3 次元の回転を切り出せない。何かうまい方法はないのだろうか？

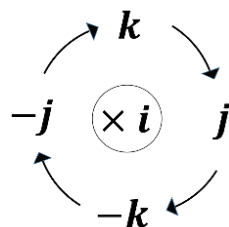
- そういえば非可換だった⁵⁸

非可換なので、右から掛けたらどうなる？

右から i を掛けた場合：



$1-i$ 平面



$j-k$ 平面：逆向き

なんと $1-i$ 平面は同じ向きで、 $j-k$ 平面は逆向きに回る！じゃあ $-i$ だとその逆になるだろう。

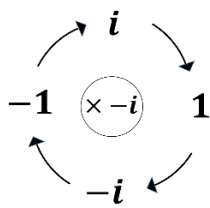
つまり、こうなってほしい

$$\begin{bmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

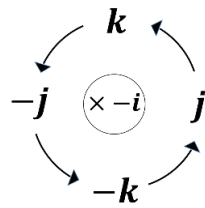
$$\because \begin{aligned} 1 \times i &= i, & i \times i &= -1 \\ ji &= -k, & ki &= j \end{aligned}$$

⁵⁸ ハミルトン卿ご自身は、この積の非可換性（当時初？）あまりお気に召さなかったらしい

右から $-i$ を掛けた場合：



$1-i$ 平面：逆向き



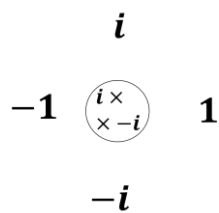
$j-k$ 平面

$$\because \begin{aligned} 1 \times (-i) &= -i, & -i \times (-i) &= -1 \\ j(-i) &= k, & k(-i) &= -j \end{aligned}$$

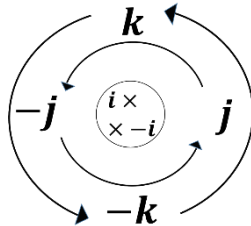
これなら、左から i を、右から $(-i)$ を掛けることで $1-i$ 平面の回転だけを無くせそう。

● というわけで

左から i 右から $-i$ を掛けた場合：



$1-i$ 平面：回転なし



$j-k$ 平面：2倍回転

$$\because \begin{aligned} i \times 1 \times (-i) &= 1, & i \times i \times (-i) &= i \\ ij(-i) &= -j, & ik(-i) &= -k \end{aligned}$$

$j-k$ 平面は2倍回りそうだけど w やってみよう。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(w + ix + jy + kz)(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} &= (\cos \theta + i \sin \theta)\{(w \cos \theta + x \sin \theta) + i(-w \sin \theta + x \cos \theta) + j(y \cos \theta - z \sin \theta) + k(y \sin \theta + z \cos \theta)\} \\ &= w \cos^2 \theta + x \sin \theta \cos \theta - (-w \sin^2 \theta + x \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + i(-w \sin \theta \cos \theta + x \cos^2 \theta) + j(y \cos^2 \theta - z \sin \theta \cos \theta) + k(y \sin \theta \cos \theta + z \cos^2 \theta) \\ &\quad + i(w \sin \theta \cos \theta + x \sin^2 \theta) + k(y \sin \theta \cos \theta - z \sin^2 \theta) - j(y \sin^2 \theta + z \sin \theta \cos \theta) \\ &= w(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + ix(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &\quad + j\{y(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - z(2 \sin \theta \cos \theta)\} + k\{y(2 \sin \theta \cos \theta) + z(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} \end{aligned}$$

$$= w + ix + j(y \cos 2\theta - z \sin 2\theta) + k(y \sin 2\theta + z \cos 2\theta) \quad (8-2-4)$$

最後は倍角の公式を使った。これで $j-k$ 平面だけを回せた！

めでたしめでたし。2倍回るけど w

・・・ハミルトン劇場 終

こうなった

$$\begin{bmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

【8-3】クォータニオン：定義と諸性質

【8-3-1】定義

ここまでをまとめる。独立な虚数単位 ($\bar{i}$ は i の複素共役を表す)

$$i, j, k \quad (i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad \bar{i} = -i, \quad \bar{j} = -j, \quad \bar{k} = -k) \quad (8-3-1)$$

に対して、以下の非可換積を定義する。

$$\begin{cases} ij \equiv k \\ ji \equiv -k \end{cases} \quad \begin{cases} jk \equiv i \\ kj \equiv -i \end{cases} \quad \begin{cases} ki \equiv j \\ ik \equiv -j \end{cases} \quad (8-3-2)$$

複素数を拡張した 1 を含めた 4 つの元の数

$$q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z \quad (q_0, q_x, q_y, q_z \in \mathbb{R}) \quad (8-3-3)$$

をクォータニオン (四元数) という。和、スカラー積 ($\beta \in \mathbb{R}$) を

$$p + q = p_0 + q_0 + i(p_x + q_x) + j(p_y + q_y) + k(p_z + q_z) \quad (8-3-4)$$

$$\beta q = \beta q_0 + i\beta q_x + j\beta q_y + k\beta q_z \quad (8-3-5)$$

と定義することで、4次元ベクトルとしてのベクトル空間の公理を満たす。

(4次元ベクトルではあるが複素数と同様に太字表記はしない)

その積は 4 次元における回転を表すが、クォータニオン $q = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$ を用いて

$p = w + ix + jy + kz$ に左から q , 右から $\bar{q}$ を掛けることで、 $j-k$ 平面のみの θ 回転を得る。

$$p' = qp\bar{q} = w + ix + j(y \cos \theta - z \sin \theta) + k(y \sin \theta + z \cos \theta) \quad (8-3-6)$$

($\cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\theta}{2}$ でも同様)

これにより、虚数部分を取り出すことで 3 次元の各座標軸まわりの回転の表現を得る。

以下、クォータニオンの性質についてまとめていく。ついでに任意軸まわりの回転に拡張するための準備を行う。

【8-3-2】スカラー+ベクトル表記

クォータニオン $p = p_0 + ip_x + jp_y + kp_z$, $q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$ において積は

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + ip_x + jp_y + kp_z)(q_0 + iq_x + jq_y + kq_z) \\ &= p_0q_0 - (p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z) + p_0(iq_x + jq_y + kq_z) + q_0(ip_x + jp_y + kp_z) \\ &\quad + i(p_yq_z - p_zq_y) + j(p_zq_x - p_xq_z) + k(p_xq_y - p_yq_x) \end{aligned} \quad (8-3-7)$$

となる (なんじゃこりゃ! マジメンドクサイ! なんとかならんのか!)。よくみると実数部分の

$(p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z)$ および虚数部分の $i(p_yq_z - p_zq_y) + j(p_zq_x - p_xq_z) + k(p_xq_y - p_yq_x)$ は、それぞれ (p_x, p_y, p_z) と (q_x, q_y, q_z) をベクトルの成分とみなした場合の内積・外積のようだ。

$$\text{試しに} \quad \mathbf{p} = ip_x + jp_y + kp_z, \quad \mathbf{q} = iq_x + jq_y + kq_z$$

として、虚数部分同士の積をとってみる。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\mathbf{q} &= (ip_x + jp_y + kp_z)(iq_x + jq_y + kq_z) \\ &= -(p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z) + i(p_yq_z - p_zq_y) + j(p_zq_x - p_xq_z) + k(p_xq_y - p_yq_x) \\ &= -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{aligned}$$

というふうに書けばだいぶましになりそう。

内積 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ の値はスカラー (実数) という事に注意。

そこでクォータニオン q に対し、実数部 q_0 をスカラー、虚数部 (q_x, q_y, q_z) を虚数単位 i, j, k を基底とする (3 次元) ベクトルの成分とみなして、以下のように表記する。

$$q = q_0 + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \equiv iq_x + jq_y + kq_z \quad (8-3-8)$$

また上記の積 (8-3-7) 式は

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \equiv p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z \quad (8-3-9)$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} \equiv i(p_y q_z - p_z q_y) + j(p_z q_x - p_x q_z) + k(p_x q_y - p_y q_x) \quad (8-3-10)$$

という内積・外積の記法を用いれば

$$pq = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (8-3-11)$$

と書ける⁵⁹。

こうすることで 3 次元ベクトルとみなした虚数部分に対して煩雑な成分での計算の見通しが良くなり、次項で述べるように内積・外積などベクトルの代数が適用でき、また回転の対象となる 3 次元ベクトルとの対応が明確になる。ただしこの「ベクトル」には上記で試しにやったクォータニオンとしての本来の「非可換積」も定義されており、内積・外積と混同しないように注意。この非可換性は、ベクトル表示した際の外積の部分に表れているのが (8-3-11) 式からわかる。

スカラーである q_0 とベクトルである $\mathbf{q}$ を普通に加算した表記となっている事にギョッとする人もいるかも知れない。書物によっては $p = (p_0, \mathbf{p})$, $p + q = (p_0 + q_0, \mathbf{p} + \mathbf{q})$ のように成分表記記号を用いている場合もある。スカラー部とベクトル部は、それぞれ実数部と虚数部でもあり、複素数と同様に和に関しては もともと明らかに独立しているので、わざわざ成分に分けて書くまでもない。その意味では、スカラー部である実数部には、1 というベクトル部である虚数部とは別の基底があるとみてもいいし（実際この解釈で 4 次元ベクトルとしての内積における正規直交基底となることが後にわかる）、冒頭付近で説明したような行列表示も可能であり、実はそのような（単位行列も含めた）行列が基底の実態だと考えてもいい。

[8-3-3] ベクトル部の性質

$$\mathbf{a} = ia_x + ja_y + ka_z, \quad \mathbf{b} = ib_x + jb_y + kb_z, \quad \mathbf{c} = ic_x + jc_y + kc_z, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

に対して、以下が成り立つ (ii) の性質はいずれも第 3 講と同様にして示すことができる)

(i) 複素共役

$$\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a} \quad (8-3-12)$$

(ii) 内積・外積の性質

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot (\beta \mathbf{b}) = \beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad (8-3-13)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\beta \mathbf{b}) = \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (8-3-14)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (8-3-15)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (8-3-16)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (8-3-17)$$

⁵⁹ この積をハミルトン積という。実は歴史的にはベクトルの内積・外積は、このハミルトン積として初めて世に登場したそうなの。なので、こっちが本家本元ということになる。

【第8講】回転の表現 II

(iii) クォータニオンとしての積の性質

$$ab = -a \cdot b + a \times b \quad (8-3-18)$$

演習ついでに後で qrq^{-1} の計算に使う 3 重積 abc をここで求めておこう。

まずベクトルの外積がベクトルであることから、(8-3-18)式のベクトル b に外積されたベクトル $b \times c$ を代入すると

$$a(b \times c) = -a \cdot (b \times c) + a \times (b \times c)$$

これに注意して 3 重積は、最後に(8-3-16)式を使うと

$$\begin{aligned} abc &= a(-b \cdot c + b \times c) \\ &= -(b \cdot c)a + a(b \times c) \\ &= -(b \cdot c)a - a \cdot (b \times c) + a \times (b \times c) \\ &= -(b \cdot c)a + (a \cdot c)b - (a \cdot b)c - a \cdot (b \times c) \end{aligned} \quad (8-3-19)$$

[8-3-4] ノルム・逆元と積の性質

● ノルムの定義

任意のクォータニオン q と、その複素共役 $\bar{q}$ との積は

$$q\bar{q} = (q_0 + \mathbf{q})(q_0 - \mathbf{q}) = q_0^2 - q_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{q} - (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{q}) = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$$

なので

$$q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \quad (8-3-20)$$

となり複素数と同様に $q\bar{q} \geq 0$ であり、 $q\bar{q} = 0$ となるのは $q = 0$ のときのみとなる。

よってこれを用いて自然な**ノルム** (大きさ) を定義できる。

$$\|q\| \equiv \sqrt{q\bar{q}} \quad (\|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0) \quad (8-3-21)$$

● 逆元 ($qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ となるクォータニオン q^{-1} のこと)

$q \neq 0$ のとき q に $\frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ を掛けると、ノルムの定義により $q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} q = 1$ となり複素数と同様に q の**逆元**となる。

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \quad (\text{ただし } q \neq 0) \quad (8-3-22)$$

● 複素共役、ノルム、逆元における積の性質

○積の複素共役は、順番が入れ替わった複素共役の積となる

$$\begin{aligned} \overline{(pq)} &= \overline{(p_0q_0) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (\mathbf{p}_0\mathbf{q}) + (\mathbf{q}_0\mathbf{p}) + (\mathbf{p} \times \mathbf{q})} \\ &= p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\bar{\mathbf{q}} + q_0\bar{\mathbf{p}} - (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \quad (\because \mathbf{r} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rightarrow \bar{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}) \\ &= q_0p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0\bar{\mathbf{p}} + p_0\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ &= \bar{q}_0\bar{p}_0 - \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{p}} + \bar{q}_0\bar{\mathbf{p}} + \bar{p}_0\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}} \times \bar{\mathbf{p}} = \bar{q}\bar{p} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{(pq)} = \bar{q}\bar{p} \quad (8-3-23)$$

○積のノルムは、ノルムの積となる

$$\|pq\|^2 = (pq)(\overline{pq}) = (pq)(\bar{q}\bar{p}) = p(q\bar{q})\bar{p} = p\|q\|^2\bar{p} = p\bar{p}\|q\|^2 = \|p\|^2\|q\|^2$$

$$\therefore \|pq\| = \|p\|\|q\| \quad (8-3-24)$$

○積の逆元は、順番が入れ替わった逆元の積となる

$$(pq)^{-1} = \frac{\overline{(pq)}}{\|pq\|^2} = \frac{\bar{q}\bar{p}}{\|p\|^2\|q\|^2} = q^{-1}p^{-1} \quad (8-3-25)$$

[8-3-5] 単位クォータニオンと極形式

複素数では複素平面を極座標表示することで (大きさ 1 の) 複素数 z の極形式 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を導入した。第 2 節ではこれを暗黙のうちに拡張適用していた。ここできちんと定式化しよう。

クォータニオン $q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$ において、ノルム (大きさ) が 1、すなわち

$$q\bar{q} = q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1 \quad (8-3-26)$$

となるもの (あるいはノルムで割って正規化したもの: $\hat{q} = q/\|q\|$ を改めて q としたもの) を

単位クォータニオンと呼ぶ。ノルムが 1 なので逆元は

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \bar{q} \quad (8-3-27)$$

となる。 $q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$ は (q_0, q_x, q_y, q_z) を座標値とする 4 次元空間内の半径 1 の

3 次元球面 (S^3) を表しており、以下の **4 次元極座標**を導入することで自然に表現される。

$$\begin{cases} q_0 = \cos \psi \\ q_z = \sin \psi \cos \theta \\ q_x = \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ q_y = \sin \psi \sin \theta \sin \phi \end{cases} \quad (8-3-28)$$

$$(0 \leq \psi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi)$$

(実際、 $q_x^2 + q_y^2 = \sin^2 \psi \sin^2 \theta$, $q_z^2 + q_x^2 + q_y^2 = \sin^2 \psi$, $q_0^2 + q_z^2 + q_x^2 + q_y^2 = 1$ となる。)【注】

このうち (q_x, q_y, q_z) の部分は、 $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \sin^2 \psi$ であり、半径 $\sin \psi$ の 2 次元球面の 3 次元極座標表示でもある。その方向を示す 3 次元単位ベクトル ($u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$)

$$\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z = i \sin \theta \cos \phi + j \sin \theta \sin \phi + k \cos \theta \quad (8-3-29)$$

を導入することで

$$\mathbf{q} = iq_x + jq_y + kq_z = \sin \psi (i \sin \theta \cos \phi + j \sin \theta \sin \phi + k \cos \theta) = \sin \psi \mathbf{u}$$

と書け、これを用いた単位クォータニオンのスカラー+ベクトル表記の**極形式**

$$q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{u} \quad (8-3-30)$$

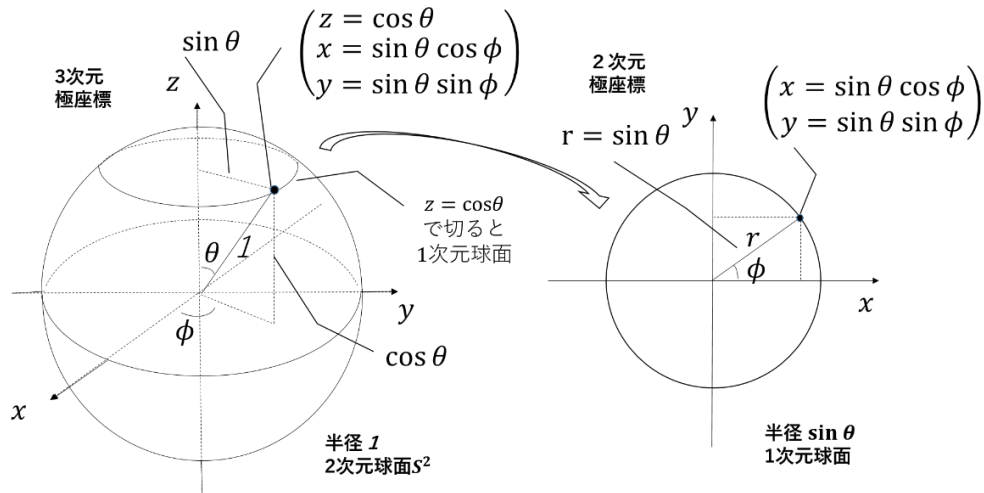
を得る。なお、定義から ψ の定義域は $0 \leq \psi \leq \pi$ であることに注意。

この定義で $\mathbf{u}$ が標準基底のとき、例えば $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ のときは $q = \cos \psi + i \sin \psi$ となり、複素数の極形式の自然な拡張となっていることがわかる。

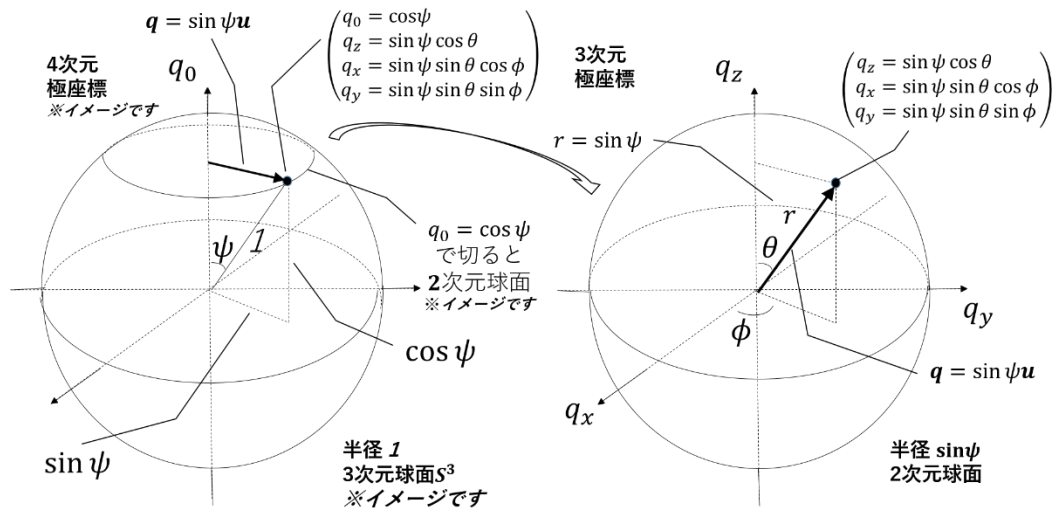
【注】4 次元の極座標? 3 次元球面? とビビった人も居るかもしれない。

この手の話は次元を落としてイメージを掴むのが良いので、やってみよう (次頁参照)。

【第8講】回転の表現 II



次元を落とすので、まずは3次元極座標と2次元球面を考える（上図左側）。図は3次元空間内の半径1の2次元球面（いわゆる球面）に対する、極角 θ 、方位角 ϕ の3次元の極座標を表している。半径1なので2次元球面上の点の z 座標値は $\cos \theta$ となり、この z 座標で2次元球面を切断する（ z をこの値で固定、すなわち $z = \cos \theta$ なので θ をこの値で固定する）と (x, y) 座標値は半径が $\sin \theta$ の1次元球面(円周)になる。この1次元球面(円周)を切り出したのが図の右側で、2次元の極座標で半径 $\sin \theta$ の1次元球面(円周)を表示したものとなっている。



以上の話に対して次元をひとつ上げたものが上図となる。図の左側は4次元空間内の単位クォータニオンが成す半径1の3次元球面 $q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$ に対する極角 ψ の4次元の極座標を表している（座標軸はそれぞれ q_0 軸、 q_x 軸、 q_y 軸、 q_z 軸となる。4次元の図は描けないので、次元を落として3次元の図で描かれている。※イメージです）。半径1なので3次元球面上の点の q_0 座標値は $\cos \psi$ となり、この q_0 座標で3次元球面を切断する（ ψ を固定する）と (q_x, q_y, q_z) 座標値は半径が $\sin \psi$ の2次元球面になる（左図での見た目は1次元球面として描かれている。※イメージです）。この2次元球面を切り出したのが図の右側で、3次元の極座標で半径 $\sin \psi$ の2次元球面を表示したものとなっている。各座標軸は q_x, q_y, q_z を表し、極座標が指す大きさ $\sin \psi$ の3次元ベクトルが q で、その向きの単位ベクトルが u となる。

[8-3-6] 4次元ベクトルとしての内積

● 定義

クォータニオンの 4 次元ベクトルとしての内積は、クォータニオン p, q に対して

$$p \cdot q \equiv \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p}) \quad (8-3-31)$$

と定義することができる。これは第 3 講【3-4】例 2 で定義した複素数の内積の自然な拡張であり内積の公理を満たすことは容易にわかる。成分で表記すると $p = p_0 + \mathbf{p}, q = q_0 + \mathbf{q}$ として

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p}) &= \frac{1}{2}\{(p_0 + \mathbf{p})(q_0 - \mathbf{q}) + (q_0 + \mathbf{q})(p_0 - \mathbf{p})\} \\ &= \frac{1}{2}(p_0q_0 - p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{q} + q_0p_0 - q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p}) \\ &= p_0q_0 - \frac{1}{2}(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}) \\ &= p_0q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_0q_0 + p_xq_x + p_yq_y + p_zq_z \end{aligned} \quad (8-3-32)$$

となり、4 次元ベクトルに対する標準内積となる。また自身との内積をとるとノルムの 2 乗となる自然な内積であり、さらにこの内積を基底であるクォータニオンの実数単位 1 および虚数単位 i, j, k に対してとれば、これらが 4 次元ベクトル空間の正規直交基底をなすこともわかる。

● 回転による不変性

任意の単位クォータニオン s の左からの積による 4 次元における回転⁶⁰で、この内積の値（およびノルム）が不変であることを示す。回転により $p' = sp, q' = sq$ と変換されるとすると、

$$\begin{aligned} p' \cdot q' &= \frac{1}{2}(p'\bar{q}' + q'\bar{p}') = \frac{1}{2}(sp\bar{s}q + sq\bar{s}p) = \frac{1}{2}(sp\bar{q}\bar{s} + sq\bar{p}\bar{s}) = s\frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p})\bar{s} \\ &= s(p \cdot q)\bar{s} = (p \cdot q)(s\bar{s}) = p \cdot q \end{aligned} \quad (8-3-33)$$

となり、不変となる⁶¹。

またこれにより自身との内積より求まるノルムも不変となることがわかる。 ■

● 幾何学的意味

任意の非零クォータニオン p, q の内積を考える。 $p = \|p\|\hat{p}, q = \|q\|\hat{q}$ と書いて（ここで $\hat{p}, \hat{q}$ は単位クォータニオン）、ある単位クォータニオン s による回転 $\hat{p}' = s\hat{p}, \hat{q}' = s\hat{q}$ において、 $\hat{p}'$ を成分表示で $\hat{p}'_0 = 1, \hat{\mathbf{p}}' = \mathbf{0}$ に向けられたとする（実際、 $s = \hat{p}^{-1}$ で可能）。この時、回転後の p' と q' の 4 次元内積はノルムが不変なので $p' \cdot q' = \|p'\|\|q'\|(\hat{p}'_0\hat{q}'_0 + \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{q}}') = \|p\|\|q\|\hat{q}'_0$ となり、この値は $\hat{q}'$ を極形式で表した際の極角（ $\hat{p}'$ と $\hat{q}'$ のなす角となる）を ψ とすれば、 $\|p\|\|q\|\cos\psi$ となる。この内積の値は (8-3-33) 式により任意の単位クォータニオンとの積による回転で不変となり、通常の幾何ベクトルの内積と同様な幾何学的意味を持つことがわかる。

⁶⁰ 4 次元の一般的な回転は実はさらに複雑で、単位クォータニオンの左側からの積で表されるこの回転はその一部となる。付録 1 で概要を述べる。

⁶¹ 成分表示 $p_0q_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ としても不変となることを直接計算して確かめることができる。付録 2 参照。

【8-4】クォータニオン：3次元回転の表現

【8-4-1】任意軸まわりの回転

以下のような単位クォータニオン

$$q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z = q_0 + \mathbf{q} = \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u} \quad (8-4-1)$$

$$(\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z, \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1, \quad q_0 = \cos \frac{\psi}{2}, \quad \mathbf{q} = \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u}, \quad 0 \leq \frac{\psi}{2} \leq \pi)$$

(極角を $\psi/2$ で表して定義より $0 \leq \frac{\psi}{2} \leq \pi$ これを ψ でみれば $0 \leq \psi \leq 2\pi$, 混乱しないように)

および3次元空間内の任意の点Pの位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を表すクォータニオン

$$\mathbf{r} = r_0 + ix + jy + kz = r_0 + \mathbf{r} \quad (8-4-2)$$

において $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = q\mathbf{r}q^{-1}$ となる積による変換を考える。

$\mathbf{r}' = r'_0 + \mathbf{r}' = q\mathbf{r}q^{-1} = q(r_0 + \mathbf{r})q^{-1} = r_0 + q\mathbf{r}q^{-1}$ であり、以下のように $q\mathbf{r}q^{-1}$ はベクトル部のみとなるので $r'_0 = r_0$ となり r_0 の値は影響しないので通常 $r_0 = 0$ として取り扱う。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= q\mathbf{r}q^{-1} = (q_0 + \mathbf{q})\mathbf{r}(q_0 - \mathbf{q}) = (q_0 + \mathbf{q})(q_0\mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{q}) = q_0^2\mathbf{r} + q_0(\mathbf{q}\mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{q}) - \mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q} \\ &= q_0^2\mathbf{r} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) - \{-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{r} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{q})\} \end{aligned} \quad (8-4-3a)$$

$$= (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{r} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \quad (8-4-3b)$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\psi}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}\right)\mathbf{r} + 2\sin^2 \frac{\psi}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} + 2\cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \quad (8-4-3c)$$

$$= \cos \psi \mathbf{r} + (1 - \cos \psi)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} + \sin \psi (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \quad (8-4-3)$$

となり、ロドリゲスの回転公式 (ベクトル表示) (7-4-3) 式と一致する。

ここで(8-4-3a)式へは (8-3-18)式より $\mathbf{q}\mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{q} = 2(\mathbf{q} \times \mathbf{r})$ また(8-3-19)式より $\mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q}$ を展開した。(8-4-3b)式へは (8-3-15)式より $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{q}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{q}) = 0$ となることを用いた。

さらに(8-4-3c)式へは 極形式 $q_0 = \cos \frac{\psi}{2}, \mathbf{q} = \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u}$ を代入、最後の(8-4-3)式へは倍角・半角の公式を用いた。

以上により、単位クォータニオン $q = \cos(\psi/2) + \sin(\psi/2)\mathbf{u}$ を用い $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = q\mathbf{r}q^{-1}$ として 回転軸 $\mathbf{u}$ のまわりに角度 ψ だけ回転させる表現を得た。なお、変換式 $\mathbf{r}' = q\mathbf{r}q^{-1}$ において q を $-q$ としても式は不変となり、この q と $-q$ の異なる2つの単位クォータニオンは同じ3次元回転を表現することに注意が必要となる。[8-4-4] 項にて詳しく調べる。

【8-4-2】3次元回転の合成

3次元の点 $\mathbf{r}$ を単位クォータニオン q_A, q_B により続けて回転させる事を考える。

$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = q_A\mathbf{r}q_A^{-1}$, $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'' = q_B\mathbf{r}'q_B^{-1}$ において、以下を得る。

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'' = q_B\mathbf{r}'q_B^{-1} = q_B(q_A\mathbf{r}q_A^{-1})q_B^{-1} = (q_Bq_A)\mathbf{r}(q_A^{-1}q_B^{-1}) = (q_Bq_A)\mathbf{r}(q_Bq_A)^{-1} \quad (8-4-4)$$

従って、単位クォータニオン q_A, q_B による連続した回転に対し、その積 $q = q_Bq_A$ が合成された回転となる。なお $\|q_Bq_A\| = \|q_B\|\|q_A\| = 1$ より積 q_Bq_A もまた単位クォータニオンとなる。

[8-4-3] 回転行列による表示

(8-4-3b)式 : $\mathbf{r}' = (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{r} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r})$ を線形変換の行列表示に書き直す。

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} x'_i &= (q\mathbf{r}q^{-1})_i = (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})x_i + 2 \sum_{j=1}^3 (q_j x_j) q_i + 2q_0 \sum_{k,j=1}^3 \varepsilon_{ikj} q_k x_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\delta_{ij} + 2q_i q_j - 2q_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} q_k \right\} x_j \end{aligned}$$

と書けるので、

$$R_{ij} = (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\delta_{ij} + 2q_i q_j - 2q_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} q_k \quad (8-4-5)$$

が回転行列となる。行列表記で書き下すと、

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_1 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_3 q_1 - q_0 q_2) & 2(q_3 q_2 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (8-4-6)$$

なお 極形式 $q_0 = \cos \frac{\psi}{2}, q_i = \sin \frac{\psi}{2} u_i$ を(8-4-5)式、(8-4-6)式に代入すると当然ロドリゲスの回転公式の行列表示 (7-4-4)式、(7-4-5)式と一致する。

[▼C] 演習：実際に回転行列であることを確かめよう。(8-4-5)式とその転置行列との積をとると

$$\begin{aligned} (R^T R)_{ij} &= \sum_{k=1}^3 R_{ik}^T R_{kj} = \sum_{k=1}^3 R_{ki} R_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left\{ (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\delta_{ki} + 2q_k q_i - 2q_0 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{kil} q_l \right\} \left\{ (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\delta_{kj} + 2q_k q_j - 2q_0 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{kjm} q_m \right\} \\ &= (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})^2 \delta_{ij} + 2(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})q_i q_j - 2q_0(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ijm} q_m \\ &\quad + 2(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})q_j q_i + 4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})q_i q_j - 4q_0 \sum_{k,m=1}^3 \varepsilon_{kjm} q_k q_i q_m \\ &\quad - 2q_0(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jil} q_l - 4q_0 \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{kil} q_k q_j q_l + 4q_0^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{kil} q_l \varepsilon_{kjm} q_m \\ &= (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})^2 \delta_{ij} + 4q_0^2 q_i q_j + 4q_0^2 \sum_{l,m=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{jl}) q_l q_m \\ &= \{(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})^2 + 4q_0^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\} \delta_{ij} = (q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})^2 \delta_{ij} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

となり、確かに R は3次の直交行列である。また(8-4-5)式あるいは(8-4-6)式は $q_0 \rightarrow 1,$

$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$ にて連続的に単位行列に移行することにより行列式の値は+1 となることがわかる。

以上により R は回転行列となることが確かめられた。

[8-4-4] 単位クォータニオンのパラメータ領域

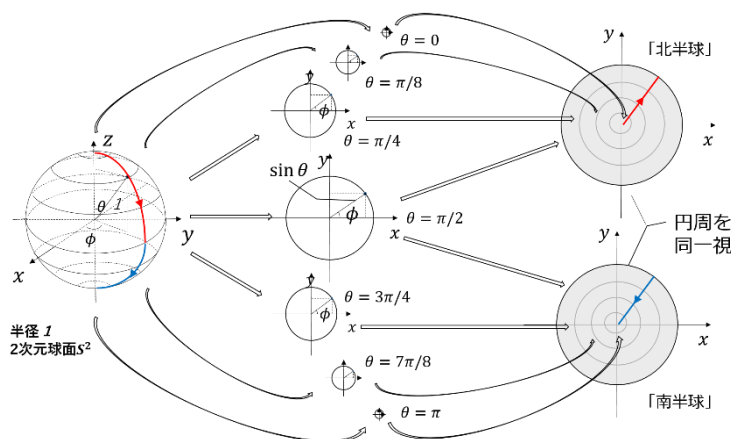
[8-3-5]で定義した単位クォータニオンの極形式を用いて、そのパラメータ領域全体の構造をもとに、3次元回転全体とどのような関係になっているのかを調べよう。そのためには、まず4次元空間に埋め込まれた3次元球面 S^3 の構造を知る必要がある。3次元球面は文字通り3次元の構造を持つが、4次元空間に埋め込まれているものであり3次元の住人である我々にとって直観的な理解は残念ながら難しい。先にみたように次元を落として考えるのがイメージを掴みやすいので、まずは「3次元空間に埋め込まれた2次元球面を2次元の住人にどうすれば説明できるか？」という観点で見てみよう。

2次元住人は2次元平面およびその上の直線や曲線、(中身の詰まった)多角形面や円盤を理解できる。2次元球面もその一部の領域は当然「面」として理解できるが、その「面は曲がって」いて「全体は繋がっている」と言われても「どっちに曲がっているのか？どうやって繋がるのか？」が理解できない。というわけで、まず思いつくのは2次元球面を赤道でぶった切って「北半球」と「南半球」に分け、それぞれを平面上にベタッと潰した2枚の円盤として提示するという手法だ。だが2次元住人にとっては「潰すって何をどちら向きに？」という話になる。話の筋は良さそうなので、説明の方法を考えよう。2次元住人も数学は理解できる(という設定でw)。

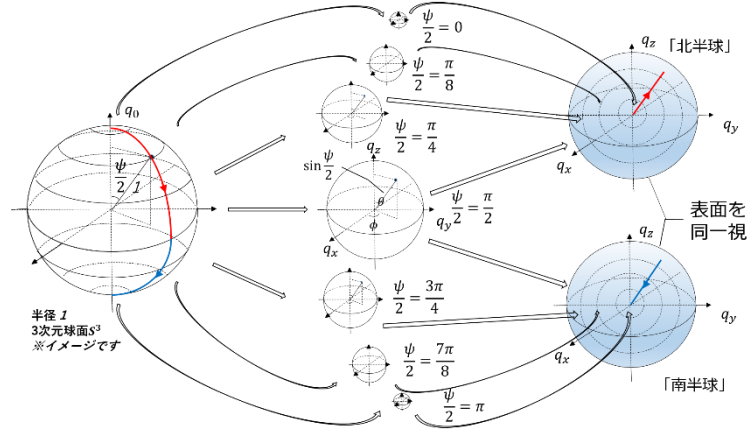
[8-3-5]でみたように3次元極座標の極角 θ 一定で球面を切断すると半径 $\sin \theta$ の円周となり、この円周は2次元住人にもよく理解できる。そこでこの半径 $\sin \theta$ の円周を θ の値を連続的に変化させながら、同心円として $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲で集めていき「北半球」として半径1の円盤を構成す

る。この円盤の円周はちょうど元の2次元球面の「赤道」にあたることになる。同様にして今度は「南半球」として $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で半径1の2枚めの円盤を構成する。この円盤の円周も元の2次元球面の「赤道」にあたり、2枚の円盤の円周上の点は同じ点を表すので、この2つの円周を同一視することで元の2次元球面を構成することになる。3次元住人の我々にとっては、この2枚の円盤を円周で貼り合わせ「膨らませれば」元の2次元球面になることは容易に理解できるが2次元住人にとっては「膨らませるってどっち向きに膨らむの？」ということになってしまう。というわけでこの円周を同一視した2枚の円盤として2次元球面を理解してもらうことになる。

以上の話をひとつ上の次元で考えてみよう。3次元住人も数学は理解できる(という設定でw)。



[8-3-5]でみたように 4 次元極座標の極角 ψ 一定で 3 次元球面を切断すると半径 $\sin \psi$ の球面となり、この球面は 3 次元住人にもよく理解できる。後の話の都合上極角を $\frac{\psi}{2}$ で測ることにしよう。この半径 $\sin \frac{\psi}{2}$ の球面を $\frac{\psi}{2}$ の値を連続的に変化させながら、同心球面として $0 \leq \psi/2 \leq \pi/2$ の範囲で集めていき「北半球」とし



て半径 1 の球体を構成する。この球体表面はちょうど元の 3 次元球面の「赤道面」にあたることになる。同様にして今度は「南半球」として $\pi/2 \leq \psi/2 \leq \pi$ の範囲で半径 1 の 2 つめの球体を構成する。この球体表面も元の 3 次元球面の「赤道面」にあたり、2 つの球体表面上の点は同じ点を表すので、この 2 つの表面を同一視することで、元の 3 次元球面を構成することになる。4 次元住人のクォータニオンにとっては、この 2 つの球体を表面で貼り合わせ「膨らませれば」元の 3 次元球面になることは容易に理解できるが、3 次元住人にとっては「膨らませるってどっち向きに膨らむの?」ということになってしまう。

というわけでこの表面を同一視した 2 つの球体として 3 次元球面を理解してもらうことになる。

さて単位クォータニオンで構成された 3 次元球面 S^3 でもある、この 2 つの半径 1 の球体について調べよう。球体の（内部も含めた）各点は S^3 から切り出された球面上の点でもあり、[8-3-5]でみたように 3 次元座標が (q_x, q_y, q_z) で表され、その座標点を位置ベクトル $\mathbf{q}$ で表すと、これは単位クォータニオンのベクトル部に相当し $\mathbf{q} (= \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u})$ の大きさは切り出した球面の半径 $\sin \frac{\psi}{2}$ となる。「北半球」の球体は範囲 $0 \leq \frac{\psi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ の、「南半球」の球体は範囲 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\psi}{2} \leq \pi$ の該当する $\frac{\psi}{2}$ が元の単位クォータニオンの極角に相当し、その余弦としてスカラー部 $q_0 = \cos \frac{\psi}{2}$ を得る。 q_0 の値は「北半球」では球の中心から表面に向かい $1 \geq q_0 \geq 0$ 、「南半球」では球の表面から中心に向かい $0 \geq q_0 \geq -1$ となり、ベクトル部を表す $\mathbf{q}$ とともに $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}$ として S^3 上の単位クォータニオンに対応するという構造となる。

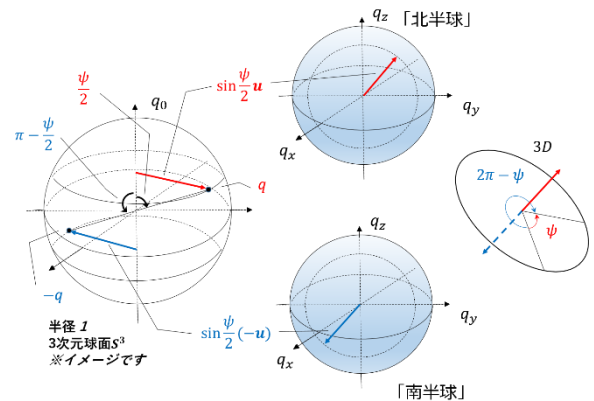
「幾何学的」には、「北半球」の球体の中心は S^3 の「北極点」である $q_0 = +1, \mathbf{q} = \mathbf{0}$ ($\frac{\psi}{2} = 0$) に、同一視した両球体表面は S^3 の「赤道面」である $q_0 = 0, \|\mathbf{q}\| = 1$ ($\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2}$) に、「南半球」の球体の中心は S^3 の「南極点」である $q_0 = -1, \mathbf{q} = \mathbf{0}$ ($\frac{\psi}{2} = \pi$) に、それぞれ対応する。

では 3 次元の回転との関係を調べよう。(8-4-3) 式は、単位クォータニオンを $\mathbf{q} = \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u}$ としたとき、変換 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{q} \mathbf{r} \mathbf{q}^{-1}$ が $\mathbf{u}$ を回転軸とした角度 ψ の 3 次元回転を表し、これは回転ベクトルによる回転の表現であるロドリゲスの回転公式 (7-4-3) 式と同等だった。また[7-4-4]で

【第8講】回転の表現 II

は回転ベクトルのパラメータ領域となる半径 π の球体を調べることで 3 次元回転全体の構造を調べた。以上を元にまずは球体表面を除いた「北半球」の半径 1 の球体内部を調べよう。中心は無回転（基準姿勢）を表し、中心以外の球体内部の点 $\mathbf{q} = \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u}$ は $\mathbf{u}$ を回転軸とした回転角 ψ の 3 次元回転を表し、球体表面を除いた「北半球」では $0 \leq \frac{\psi}{2} < \frac{\pi}{2}$ すなわち $0 \leq \psi < \pi$ の回転を表すことになる。 $\mathbf{u}$ が真逆を向いている場合は逆向きの $0 \leq \psi < \pi$ の回転を表すことになり、まさに回転ベクトルのパラメータ領域内部（半径 π の球体表面以外）と 1 対 1 に対応している。

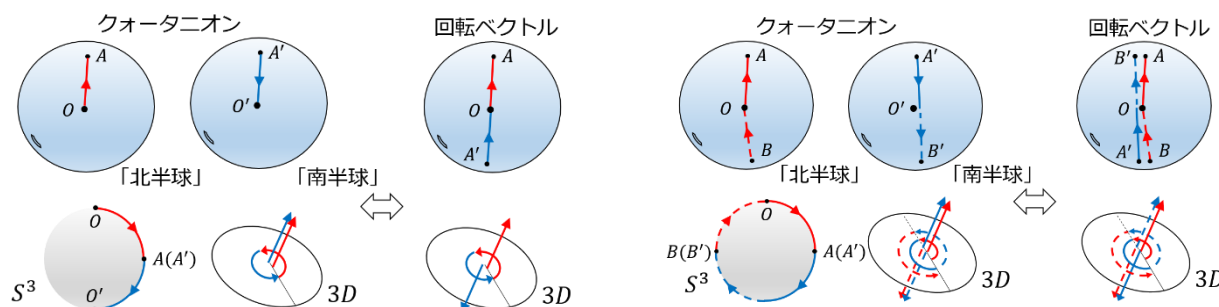
同一視する球体表面は後回しにして、「南半球」の球体内部を調べよう。「北半球」との一番の違いは極角の 2 倍となる 3 次元回転での回転角の範囲で、「北半球」が $0 \leq \psi < \pi$ だったのに対し、「南半球」では $\pi < \psi \leq 2\pi$ となることだ。つまりクォータニオンによる自然な回転の範囲は南北合わせて $0 \leq \psi \leq 2\pi$ となる。逆向きの回転軸は逆向きの回転を表現するので、合わせていわば $-2\pi \leq \psi \leq 2\pi$ の回転ということになり、回転ベクトルが表現する倍の範囲となる。思い出すべきは、任意の単位クォータニオン q に対し $-q$ も全く同じ 3 次元回転を表していたことであり、 $q = (q_0, q_x, q_y, q_z)$ に対し $(-q_0, -q_x, -q_y, -q_z)$ となるのでスカラー部の符号は変わり、ベクトル部は逆向きのベクトル ($-\mathbf{q}$ or $-\mathbf{u}$) となる。これは図のように 4 次元空間で原点对称な点すなわち S^3 上での対蹠点同士となり、その極角は $\frac{\psi}{2}$ に対して $\pi - \frac{\psi}{2}$ で表されることになる。実際 $\cos(\pi - \frac{\psi}{2}) = -\cos \frac{\psi}{2}$ よりスカラー部の符号は変わり、 $\sin(\pi - \frac{\psi}{2}) = \sin \frac{\psi}{2}$ より長さ（半径）が同じとなる「北半球」の $\sin \frac{\psi}{2} \mathbf{u}$ が指す点と、反対向きである「南半球」の $\sin \frac{\psi}{2} (-\mathbf{u})$ が指す点にあたり、互いに逆向きの回転となる同じ 3 次元回転後の姿勢を表すことになる。つまり「南半球」の球内の各点もまた「北半球」と同様に回転ベクトルのパラメータ領域内部と 1 対 1 に対応する。



後回しにした「赤道面」である同一視した球体表面は、「南半球」で議論したように同じ半径でベクトルの向きが逆になる点、つまり球体表面上の対蹠点同士が互いに逆向きの π 回転となる 3 次元回転を表すことになる。回転ベクトルの場合は同一視した逆向きの π 回転に対して、単位クォータニオンの自然なパラメータ領域としては別々の $\pm q$ として対応していることになる。

以上により単位クォータニオンのパラメータ領域全体は、「南北半球」の内部と「赤道面」を合わせて 3 次元回転全体を過不足なくピッタリ 2 回「覆う」対応となることがわかった。このことを二重被覆 (double covering) であるという。どう応用するのかは使い方次第といったところか。回転の合成や次項の補間などで π 回転を超える場合便利な一方、注意しないと大混乱となる。

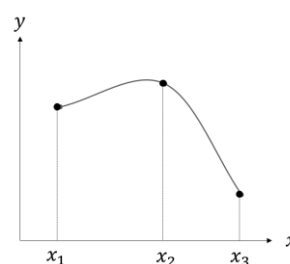
前講で小グモに調べてもらった「つながり具合」も確認しておこう。まず S^3 あるいは可視化した「南北半球」である 2 つの球体自体は連結かつ単連結⁶²（2 つの球体はその表面でつながっていることに注意）であることがわかる。以下の図は 3 次元回転である z 軸まわりの 1 回転、2 回転で何が起こっているのかを示している。読者も色々な図を描いてみて各自で理解を深めて頂きたい。



[8-4-5] 球面線形補間

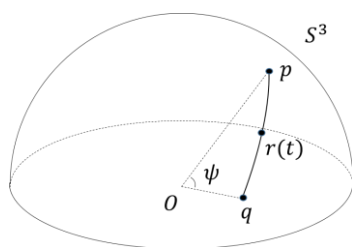
クォータニオンの大きな利点の一つが、比較的容易に**補間**を実現できる事にある。

この項では最も簡単な 2 つの回転を繋ぐ補間について解説するが、まずそもそも「補間」とは何か？という話を簡単にしておこう。読んで字の如く「間を補う」ことであり、本来は離散的（不連続）にしか存在しないデータの組を連続的に変化したものみなしてデータ間を「なめらか」につなぎ、存在しないデータ間の値として補う手法のことである。



2 つの単位クォータニオン p, q により表現された回転をつなぐ補間を考えてみよう。 $r(t)$ を回転 p から回転 q へのパラメータ t ($0 \leq t \leq 1, t \in \mathbb{R}$) を持つ補間を表す単位クォータニオンとし（つまり $r(t)$ 自体もまた回転を表す）、以下のような線形結合関係があるものとする。

$$r(t) = \alpha(t)q + \beta(t)p \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} r(0) = p \\ r(1) = q \end{cases} \quad (8-4-7)$$



p, q, r は単位クォータニオンなので 3 つとも半径 1 の S^3 上の点であり、 $r(t)$ を p と q を結ぶ S^3 上の「大円」の一部となるようにとるとする。（左の図は S^3 上の p, q, r を、次元を落とした S^2 上の点として描いたイメージ図となる。）このような補間を**球面線形補間**と言う。

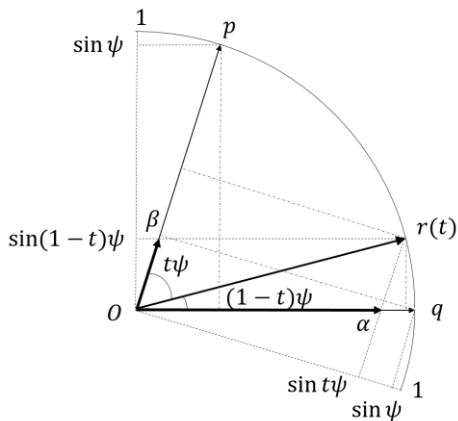
なお $q = \pm p$ の場合は $r(t)$ は定まらないので $q \neq \pm p$ とする。

ここで S^3 の中心 O と p, q の成す角 ψ （の余弦）は 4 次元空間のベクトルである単位クォータニオンの 4 次元ベクトルとしての内積において以下のように求まる。

$$p \cdot q = \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p}) = \|p\| \|q\| \cos \psi = \cos \psi \quad (8-4-8)$$

⁶² ちなみに「単連結な閉じた 3 次元物体（多様体）は S^3 だけ（正確には S^3 と同相）」というのが有名なポアンカレ予想で 2002~3 年にペレルマンにより肯定的に解決された

【第8講】回転の表現 II



図はこの中心 O と単位クォータニオン p, r, q が作る2次元平面(半径1の扇型)を切り出したものであり、角 ψ が $r(t)$ によって分けられた角をそれぞれ $t\psi$, $(1-t)\psi$ とする⁶³。この図において、ベクトルとしての $r(t)$ をベクトル p, q の線形結合で表したのが (8-4-7)式であり、その係数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ は p, q のノルムが1であることから図の $\overline{O\alpha}$, $\overline{O\beta}$ の長さとなり、幾何学的に求める事ができる。

点 q, r から $\overline{Op}$ におろした垂線の長さは、 $\overline{Oq}$, $\overline{Or}$ の長さが1なのでそれぞれ $\sin \psi$, $\sin t\psi$ となる。 $\sin \psi : \sin t\psi = \overline{Oq} : \overline{O\alpha}$ なので、 $\overline{Oq}$ の長さ1より $\alpha(t) = \frac{\sin t\psi}{\sin \psi}$ を得る。同様に点 p, r から $\overline{Oq}$ におろした垂線の長さは、 $\overline{Op}$, $\overline{Or}$ の長さが1なのでそれぞれ $\sin \psi$, $\sin(1-t)\psi$ となる。 $\sin \psi : \sin(1-t)\psi = \overline{Op} : \overline{O\beta}$ なので、 $\overline{Op}$ の長さ1より $\beta(t) = \frac{\sin(1-t)\psi}{\sin \psi}$ を得る。

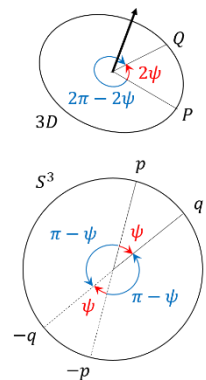
以上により

$$r(t) = \frac{\sin t\psi}{\sin \psi} q + \frac{\sin(1-t)\psi}{\sin \psi} p \quad (8-4-9)$$

$$(t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1, \quad \cos \psi = p_0 q_0 + p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z)$$

となる単位クォータニオンの球面線形補間を得た。

なお前項でみたように、 S^3 上の対蹠点同士となる単位クォータニオンの対は3次元上では同じ回転を表していた。従って補間の対象となる3次元上での回転が S^3 上では対蹠点側の単位クォータニオンでもあり得ることに注意が必要となる。右の図はその例で、3次元の回転 P, Q とそれを表す S^3 上の単位クォータニオン p, q および対蹠点上の $-p, -q$ を図示したもので、仮に3次元の回転 P, Q に対する角度 2ψ での補間 $P \rightarrow Q$ を求めたい場合、 S^3 上で $p \rightarrow q$ または $-p \rightarrow -q$ であれば意図通りとなるが、そうでない場合は、反対回りの $2\pi - 2\psi$ 回転となる補間を得ることになってしまう。回転の結果としてはどちらも同じ $P \rightarrow Q$ だが間の情報が主となる補間では違いは重要となる。このような場合は、4次元内積 $p \cdot q = \cos \psi$ の符号により、どちら側の補間に当たるのかを区別できることになる。



また代数的にも

$$r(t) = (qp^{-1})^t p \quad (8-4-10)$$

という式により、上記と全く同じ補間を表すことが知られている。

付録3にて (8-4-9)式と同値な式であることを示し、この式の意味を解説する。

⁶³ 角度を線形に分割することで「角速度」が一定となり、球面上の「速度」が一定な補間となる。

【8-5】[▼]付録1：一般的な4次元の回転について

4次元の回転は、本講の趣旨（3次元回転）および本講座の程度を超えるので、ここでは概要の説明にとどめる。以下の表は2・3・4次元における回転の自由度、固有値、回転行列の例を示す。なお各次元の回転行列の例に対しその固有方程式を解くと、それぞれの固有値を得ることに注意。

次元 n	自由度 $\frac{1}{2}n(n-1)$	固有値	回転行列の例
2	1	$e^{\pm i\theta}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
3	3	$1, e^{\pm i\theta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
4	6	$e^{\pm i\theta}, e^{\pm i\phi}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

表 8-5-1

- ・ 回転の自由度：単位クォータニオンの成分の独立な自由度3の倍の6であり、単位クォータニオンの左からの積で表される回転は4次元の一般の回転の一部（自由度は半分）であることがわかる。
- ・ 固有値： $e^{\pm i\theta}, e^{\pm i\phi}$ となることが知られており、2次元や3次元での回転角に相当する量が独立に2つあることを示唆している。一般の回転では回転軸に相当する実固有ベクトルは存在しない。
- ・ 回転行列の例：w-x面とy-z面がそれぞれ独立に角度 θ, ϕ で回転していることがわかる。回転面であるこの2面は原点のみで交わっていることに注意。この例のような4次元の一般の回転は **double-rotation** と呼ばれる。このうち、 $\phi = \pm\theta$ となる特殊な回転を **isoclinic-rotation** といい、 $\theta = 0$ or $\phi = 0$ となる特殊な回転を **simple-rotation** という。

任意のクォータニオン p に対して単位クォータニオン $\cos \theta + i \sin \theta$ ($\mathbf{u} = (1, 0, 0)$) を用いて、左から $q_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 、右から $q_\beta = \cos \beta + i \sin \beta$ を掛けると、第2節でみたようにそれぞれ

$$p' = q_\alpha p : \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad p' = p q_\beta : \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \text{を表す。}$$

これは、上記のそれぞれ $\phi = +\theta, \phi = -\theta$ にあたる isoclinic-rotation となる。

また左右から掛けると

$$p' = q_\alpha p q_\beta : \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ 0 & 0 & \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix} \text{を表し、} \theta = \alpha + \beta, \phi = \alpha - \beta$$

である double-rotation となる。

さらに上記において $\beta = -\alpha$ つまり $q_\beta = q_{-\alpha} = q_\alpha^{-1}$ のとき $p' = q_\alpha p q_\alpha^{-1}$ は $\theta = 0, \phi = 2\alpha$ である simple-rotation にあたり、固有値は $1, e^{\pm i2\alpha}$ となり4次元空間に埋め込まれた実回転軸を持つ3次元回転を表すことになる。これらのことは第2節で行った計算と同様にして確かめることができる。

【第 8 講】回転の表現 II

このように自由度がそれぞれ 3 である互いに独立した単位クォータニオンを左右から掛けることで、
合計の自由度が 6 となる 4 次元の一般的な回転が生成されることになる。

ついでにこの左右からの積で表された 4 次元の一般の回転に対しても、(8-3-31) 式で定義した 4 次元内積は不変となることを示す。

p, q を任意のクォータニオン、 r, s を任意の単位クォータニオンとする。 p, q が r, s により

$p' = rps, q' = rqs$ とそれぞれ回転させられたとき、4 次元内積 $p \cdot q = \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p})$ は

$$\begin{aligned} p' \cdot q' &= \frac{1}{2}(p'\bar{q}' + q'\bar{p}') = \frac{1}{2}\{(rps)\overline{(rqs)} + (rqs)\overline{(rps)}\} = \frac{1}{2}(rps\bar{s}\bar{q}\bar{r} + rqs\bar{s}\bar{p}\bar{r}) \\ &= r\left\{\frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p})\right\}\bar{r} = r(p \cdot q)\bar{r} = (p \cdot q)r\bar{r} = p \cdot q \end{aligned} \quad (8-5-1)$$

となり、題意は示された。 ■

【8-6】付録 2：成分表示における 4 次元内積の不変性について

任意の単位クォータニオン s の左からの積による回転 $p' = sp, q' = sq$ に対し、4 次元内積 $p \cdot q$ の成分表示 $p_0q_0 + p \cdot q$ の値も不変であること直接計算して確かめよう。

$$\begin{aligned} p' &= sp = s_0p_0 - s \cdot p + s_0p + p_0s + s \times p \\ \therefore p'_0 &= s_0p_0 - s \cdot p, \quad p' = s_0p + p_0s + s \times p \\ q' &= sq = s_0q_0 - s \cdot q + s_0q + q_0s + s \times q \\ \therefore q'_0 &= s_0q_0 - s \cdot q, \quad q' = s_0q + q_0s + s \times q \end{aligned}$$

において回転後の 4 次元内積の成分表示は、以下ようになる。

$$\begin{aligned} p'_0q'_0 + p' \cdot q' & \quad (= p' \cdot q') \\ &= (s_0p_0 - s \cdot p)(s_0q_0 - s \cdot q) + (s_0p + p_0s + s \times p) \cdot (s_0q + q_0s + s \times q) \\ &= s_0^2p_0q_0 - s_0p_0s \cdot q - s_0q_0s \cdot p + (s \cdot p)(s \cdot q) \\ & \quad + s_0^2p \cdot q + s_0q_0p \cdot s + s_0p \cdot (s \times q) \\ & \quad + s_0p_0s \cdot q + p_0q_0s \cdot s + p_0s \cdot (s \times q) \\ & \quad + s_0q \cdot (s \times p) + q_0s \cdot (s \times p) + (s \times p) \cdot (s \times q) \end{aligned}$$

上記最後の式で、1 行目の第 2 項、第 3 項は、それぞれ 3 行目の第 1 項、2 行目の第 2 項と打ち消し

あう。また 3 行目第 3 項と 4 行目第 2 項のスカラー 3 重積は、サイクリックに入れ替えることで

$s \times s$ となり消える。さらに 2 行目第 3 項と 4 行目第 1 項もサイクリックに入れ替えることで打ち消

し合うことがわかる。最後に 4 行目第 3 項は、(8-3-17)式を用いて展開すると

$(s \cdot s)(p \cdot q) - (s \cdot p)(s \cdot q)$ となり、この第 2 項は上記最後の式の 1 行目第 4 項と打ち消し合う。

結局多くの項が消えて残るのは

$$\begin{aligned} &= s_0^2p_0q_0 + s_0^2(p \cdot q) + p_0q_0(s \cdot s) + (s \cdot s)(p \cdot q) \\ &= s_0^2(p_0q_0 + p \cdot q) + (s \cdot s)(p_0q_0 + p \cdot q) \\ &= (s \cdot s)(p_0q_0 + p \cdot q) \\ &= p_0q_0 + p \cdot q \quad (= p \cdot q) \end{aligned}$$

となり題意は確かめられた。

【8-7】[▼A]付録 3 : オイラーの公式と代数的補間式について

(8-4-10) 式である代数的補間式の話の前に、前講の付録まで続けてきたオイラーの公式シリーズ最終話として、クォータニオン表示について考えよう。単位クォータニオンの極形式を改めて眺めると

$$q = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{u}$$

ほれほれ、そう思ってみたら、そう見えてくるよね？ というわけで (?), シリーズの式

$e^{\theta i} = \cos \theta + \sin \theta i$, $e^{\theta I} = \cos \theta + \sin \theta I$ との類推から $\mathbf{u}^n$ を考えてみると

$$\mathbf{u}^2 = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{u} = -1, \quad \mathbf{u}^3 = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^4 = 1, \quad \mathbf{u}^5 = \mathbf{u}, \quad \dots$$

となるので、 $\mathbf{u}^0 \equiv 1$ として以下のように「単位クォータニオン指数関数」を定義すると

$$e^{\psi \mathbf{u}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n}{n!} \mathbf{u}^n \quad (8-7-1)$$

$$e^{\psi \mathbf{u}} = 1 + \psi \mathbf{u} - \frac{\psi^2}{2!} - \frac{\psi^3}{3!} \mathbf{u} + \frac{\psi^4}{4!} + \frac{\psi^5}{5!} \mathbf{u} - \dots = \left(1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} - \dots\right) + \left(\psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots\right) \mathbf{u}$$

よって

$$e^{\psi \mathbf{u}} = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{u} \quad (8-7-2)$$

として、オイラーの公式のクォータニオン版を得る。 $e^{\psi \mathbf{u}}$ 自体が単位クォータニオンとなる。なお行列指数関数と同様一般的には $e^{\psi \mathbf{u}} e^{\phi \mathbf{v}} \neq e^{\psi \mathbf{u} + \phi \mathbf{v}}$ であることに注意。これは行列と同様 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の積が可換ではないからであり、 $e^{\psi \mathbf{u}} e^{\phi \mathbf{u}} = e^{(\psi + \phi) \mathbf{u}}$ が成り立つことは、展開してみればわかる。

そもそもクォータニオンは複素数の拡張だったわけで、(8-7-2)式はオイラーの公式の由緒正しき拡張ともいえる。実際、 $\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k$ において、 $(u_x, u_y, u_z) = (1, 0, 0)$ とすれば単位クォータニオンの極形式は $q = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{u} = \cos \psi + i \sin \psi$ だったわけで、 $e^{\psi \mathbf{u}} = e^{i\psi}$ となり、 $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$ としてオイラーの公式に帰着する。

さて本付録のもうひとつの主題であり、(8-4-10) 式でもある以下の代数的補間式に進もう。

$$r(t) = (qp^{-1})^t p$$

補間の目的である、それぞれ 3 次元回転を表す単位クォータニオン p, q をなめらかに繋ぎ、その間の回転を表す単位クォータニオン $r(t)$ としてこのような式を考えてみる。パラメータ $t \in \mathbb{R}$ は $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動き、 $r(0) = (qp^{-1})^0 p = p$, $r(1) = (qp^{-1})^1 p = q$ は満たしそうな気がする。だがそもそもクォータニオンの冪乗はどのように定義されるのだろうか？ 非零クォータニオン s は、そのノルム $\|s\|$ を用いて $s = \|s\| \hat{s}$ として書ける。ここで $\hat{s}$ は単位クォータニオンである。この単位クォータニオンを極形式で表し、オイラーの公式を適用すれば $\hat{s} = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{u} = e^{\psi \mathbf{u}}$ と書けるので、元のクォータニオンは $s = \|s\| e^{\psi \mathbf{u}}$ と書けることになる。これを利用してクォータニオンの実冪乗を

$$s^t \equiv \|s\|^t e^{t\psi \mathbf{u}} = \|s\|^t (\cos t\psi + \sin t\psi \mathbf{u}) \quad (0 \leq t \leq 1, t \in \mathbb{R}) \quad (8-7-3)$$

と定義しよう。ただし今必要なのは $0 \leq t \leq 1$ なので、その範囲でということで⁶⁴。

⁶⁴ 厳密には複素数の冪関数のときと同様に対数関数も導入したうえで定義し、さらに多価評価とかも議論すべきなのだろうが、ここでは $0 \leq t \leq 1$ (つまり $0 \leq t\psi \leq \psi \leq \pi$) なので これでよってことで

140

索引

3

3 次元球面 (S^3) 127

4

4 次元極座標..... 127

A

Active 変換 80, 104, 108, 109

D

double-rotation 137

D「関数」 36, 44, 51, 60, 66, 68, 70

E

extrinsic..... 104, 108, 109

I

intrinsic..... 104, 106, 108, 109

isoclinic-rotation..... 137

L

Levi-Civita 記号 34, 39, 42, 51, 52, 81

P

Passive 変換..... 80, 104, 108, 109

R

rank..... 48, 62

S

simple-rotation 137

T

Tait-Bryan 角 107

い

一次結合 28

一次従属..... 29

一次独立..... 29

一次変換..... 65

え

エルミート行列 97

エルミート随伴 97

お

オイラーの公式 18, 100, 139

か

階数..... 48

外積..... 34, 125

外積同士の内積 34, 41, 42

回転..... 67, 80

回転行列.....	75, 102, 131, 137
回転の合成.....	104, 130
回転ベクトル.....	111
解の自由度.....	48, 62, 86
鏡映.....	75
拡大係数行列.....	46
拡張 Levi-Civita 記号.....	38, 40, 44, 51
加減法.....	45
和積の公式.....	15
数ベクトル.....	33
加法定理.....	15
簡約行列.....	46, 62

き

基準姿勢.....	102
基数.....	9
奇置換.....	40
基底.....	30, 77
基底の変換行列.....	79
基底変換.....	105
逆行列.....	70
逆元.....	82, 126
逆写像.....	76
球面線形補間.....	135, 140
行基本変形.....	46, 53, 62, 63
行ベクトル.....	56
共役転置.....	97
行列.....	56, 77
行列式.....	52, 66
行列式の次数下げ.....	54
行列指数関数.....	96, 117
極形式.....	82, 127
極値問題.....	94

く

偶奇性.....	43
偶置換.....	40

クォータニオン.....	124
グラム・シュミットの正規直交化法.....	92
クラメル法則.....	50
クロネッカーのデルタ.....	31

け

計量ベクトル空間.....	33
---------------	----

こ

合成写像.....	76
合成の公式.....	15
合成変換.....	80
交代性.....	38
互換.....	40, 44
固有多項式.....	85
固有値.....	84, 137
固有ベクトル.....	84, 113
固有方程式.....	85

さ

座標系.....	30
座標値.....	30
座標変換.....	79
三角化.....	90
三角関数.....	14
三角行列.....	54

し

次元.....	30
指数.....	9
指数関数.....	9
指数法則.....	10
自然数.....	1
自然対数.....	13

実数.....	3
実二次形式.....	93
斜交座標.....	66
写像.....	76
主成分.....	46, 62
小行列式.....	68
初等関数.....	9
ジンバルロック.....	110

す

随伴行列.....	97
スカラー＋ベクトル表記.....	124
スカラー三重積.....	34, 35, 40, 42

せ

正規直交基底.....	30
整数.....	1
正則行列.....	70
正方向列.....	56
積和の公式.....	15
零行列.....	56
漸化式.....	94
線形結合.....	28
線形結合関係.....	63
線形写像.....	76
線形従属.....	29
線形性.....	31
線形独立.....	29
線形変換.....	65, 76
せん断.....	66, 80

そ

相似変換.....	90
双線形性.....	31
総和記号.....	21, 42, 61

た

対角化.....	88
対角成分.....	56
対蹠点.....	113
対数関数.....	11
多重線形性.....	38
単位行列.....	56
単位クォータニオン.....	127
単連結.....	114

ち

置換.....	43
直交行列.....	74
直交変換.....	75

て

転置行列.....	53, 56, 61, 70, 73
転倒数.....	43

と

ド・モアブルの定理.....	16, 18, 19, 100
等長変換.....	75
トレース.....	91

な

内積.....	30, 74, 125, 129
---------	------------------

に

二項定理.....	17, 20
二項展開.....	20
二重被覆.....	134

ね

ネイピア数..... 13, 17, 117, 118

の

ノルム..... 30, 82, 126

は

倍角の公式..... 15

半角の公式..... 15

ひ

表示行列の変換..... 79

標準基底..... 30, 77

ふ

フーリエ級数展開..... 95

複素共役..... 125

複素数..... 5, 33, 82, 119

不定..... 48

不能..... 48

へ

ベクトル空間..... 33

ベクトル空間の公理..... 33, 58, 78, 124

ベクトル三重積..... 34, 42

ほ

補間..... 135

ゆ

有理数..... 2

ユニタリー行列..... 97

よ

余因子..... 69

余因子行列..... 70

余因子展開..... 69

ら

ライプニッツの明示公式..... 64

り

隣接互換..... 43

る

累乗..... 9

れ

列ベクトル..... 56, 77

連立一次方程式..... 45

ろ

ロドリゲスの回転公式..... 111, 112, 131

更新履歷

- 第 1 版 2021-06-15 公開

